

Н. А. Рынинъ.

НА ЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ.

(Методъ Монжа).



Г. Монжъ. (1746—1818).

ПЕТРОГРАДЪ.

1916.

Предисловіе.

Методъ ортогональныхъ проекцій, впервые предложенный въ 1799 году французскимъ ученымъ Гаспаромъ Монжемъ ¹⁾, почему и самый методъ часто называется *методомъ Монжа*, нашелъ себѣ широкое примѣненіе въ технику.

Послѣ Монжа появился рядъ сочиненій по тому же предмету, причемъ самый методъ Монжа въ нихъ не подвергался измѣненію. Однако, нѣкоторыми авторами въ этихъ сочиненіяхъ были введены новыя условныя обозначенія и новыя приемы рѣшенія разныхъ задачъ, что облегчало изученіе упомянутаго метода.

Къ таковымъ сочиненіямъ можно отнести, на примѣръ, курсы: Адемара, Брисса, Гурнери, Оливіе и Пилле во Франціи, Вулея и Игльса въ Англіи, Бурместера, Гаука и Мюллера въ Германіи, Будаева, Курдюмова и Редера въ Россіи и многіе другіе.

Развитіе проективной геометріи послужило причиною установленію новаго взгляда на методъ ортогональныхъ проекцій, какъ на одну изъ частныхъ задачъ, рѣшаемыхъ въ проективной геометріи, и съ этой новой точки зрѣнія былъ составленъ еще рядъ курсовъ преслѣдующихъ тѣ-же задачи, что и ортогональныя проекціи, на примѣръ, Аскіери, Лоріа и Энрикеса въ Италіи, Вильсона въ Америкѣ, Винера и Фидлера въ Германіи. Въ другомъ нашемъ сочиненіи ²⁾

¹⁾ „Géométrie descriptive“. Leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la république; par Gaspard Monge, de l'Institut national. Paris. An. VII.

²⁾ Н. А. Рынинъ. „Начертательная Геометрія. Методы изображенія“. Петроградъ. 1916 г. Въ концѣ этого сочиненія приведенъ указатель литературы по Начертательной Геометріи.

мы подробно изложили упомянутую связь не только метода ортогональных проекцій, но и другихъ методовъ изображенія съ проективной геометріей.

Въ настоящемъ же трудѣ, повторяя изложеніе метода Монжа съ послѣдовавшими болѣе удобными обозначеніями и упрощенными рѣшеніями различныхъ задачъ, мы поставили себѣ главною цѣлью приноровить его къ потребностямъ техниковъ, почему почти всѣ задачи, составленныя и рѣшенныя нами въ поясненіе различныхъ отдѣловъ курса, выбраны имѣющими исключительно прикладной, техничeskій характеръ. Всѣ такія задачи, а также нѣкоторыя приложенія ортогональныхъ проекцій къ рѣшенію задачъ на построеніе тѣней, на геометрическія мѣста, на тригранные углы и на кинематическія кривыя линіи отпечатаны мелкимъ шрифтомъ.

Кромѣ задачъ, рѣшенныхъ въ курсѣ, нами составленъ примѣнительно къ нему и изданъ въ отдѣльной книгѣ еще сборникъ задачъ, чтобы читатель имѣлъ матеріалъ для упражненія при изученіи различныхъ отдѣловъ курса ¹⁾.

Въ заключеніе считаемъ долгомъ упомянуть, что въ обозначеніяхъ и въ бѣльшей части плана настоящаго труда намъ служилъ главнымъ примѣромъ прекрасный курсъ Начертательной Геометріи нашего учителя, покойнаго нынѣ, профессора Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I В. И. Курдюмова.

¹⁾ Н. А. Рыжиковъ. „Сборникъ задачъ для упражненій и заданий для эюръ по Начертательной Геометріи“. Петроградъ. 1916 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

	Стр.
Предисловіе	III
Оглавленіе	V
Введеніе	1

Часть I. Ортогональныя проекціи точекъ, прямыхъ линій, плоскостей и многогранниковъ.

§§	
1. Общее понятіе о методѣ ортогональныхъ проекціи. Проекціи точка	4
2. Прямая линія	13
a) Заданіе прямой линіи	13
b) Проекціи прямой линіи при разныхъ положеніяхъ ея относительно V и H	14
c) Опредѣленіе длины отръзка прямой линіи п угловъ наклона ея къ V и H	19
d) Опредѣленіе слѣдовъ прямой линіи	22
e) Дѣленіе линіи въ данномъ отношеніи	26
3. Двѣ прямыя линіи	28
a) Различныя взаимныя положенія линій	—
b) Проектированіе угловъ между двумя линіями	32
4. Плоскость	35
a) Заданіе плоскости	—
b) Различныя положенія плоскости относительно плоскостей проекціи	36
c) Построеніе слѣдовъ плоскости	40
d) Горизонталы и фронталы плоскости	42
5. Двѣ плоскости	44
a) Относительное положеніе двухъ плоскостей	—
b) Построеніе линіи сѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ слѣдами	47
6. Прямая линія и плоскость	49
a) Прямая линія лежитъ въ плоскости	50
b) Прямая линія параллельна плоскости	51
c) Прямая линія пересѣкается съ плоскостью	52
d) Прямая линія, перпендикулярная къ плоскости	51
7. Плоскости, взаимно перпендикулярныя или параллельныя	57
8. Опредѣленіе видимости геометрическихъ элементовъ	60
9. Изображеніе многогранниковъ	64
10. Вращеніе	69
a) Общія понятія	—
b) Вращеніе вкругъ одной оси, перпендикулярной къ H или къ V	70

§§	СТР.
e) Последовательное вращение вокруг двух осей, перпендикулярных къ плоскостямъ проекцій	78
d) Вращение плоскости вокруг ея горизонтали или фронтал	83
l) Совмещение	87
11. Перемѣна плоскостей проекцій	91
a) Общія понятія	—
b) Перемѣна одной плоскости проекцій	92
c) Перемѣна двухъ плоскостей проекцій	98
12. Пересѣчение многогранниковъ	104
a) Пересѣчение многогранника съ плоскостью	105
b) Пересѣчение многогранника съ прямою линіей	107
c) Пересѣчение многогранниковъ другъ съ другомъ	108
13. Развертка поверхностей многогранниковъ	116
14. Построение многогранниковъ	124
15. Тѣни многогранниковъ	131
a) Общія понятія	—
b) Тѣнь отъ точекъ, линій и плоскихъ фигуръ	137
c) Тѣнь отъ многогранниковъ	139

Часть II. Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей.

16. Плоскія кривыя линіи	150
a) Проектирование случайныхъ кривыхъ линій	151
b) Приближенныя построения	152
c) Проекціи круга	156
17. Кривыя линіи двойкой кривизны	161
a) Проектирование случайныхъ кривыхъ линій	—
b) Проекціи цилиндрической винтовой линіи	163
18. Виды наиболее примѣняемыхъ въ технику кривыхъ поверхностей и способы заданія ихъ въ проекціяхъ	168
a) Общія понятія	—
b) Поверхности цилиндрическія или цилиндры	172
c) Поверхности коническія или конуса	175
d) Поверхности съ ребромъ возврата	176
e) Гиперболическіе параболоиды или косыя плоскости	181
l) Цилиндронды	184
g) Коноиды	188
h) Косые цилиндры о трехъ направляющихъ	191
i) Поверхности вращения	197
j) Кривые цилиндры съ производящими постояннаго вида	203
k) Поверхности съ кривыми производящими переменнаго вида	207
l) Графическія поверхности	212
19. Пересѣчение кривыхъ поверхностей	—
a) Пересѣчение кривой поверхности съ плоскостью	213
b) Пересѣчение кривой поверхности съ прямою линіей	218
c) Пересѣчение кривой поверхности съ многогранникомъ	221
d) Пересѣчение кривыхъ поверхностей другъ съ другомъ	222
e) Пересѣчение кривой поверхности съ кривою линіей	240
20. Развертки кривыхъ поверхностей	242

§§	СТР.
21. Плоскости, касательныя къ кривымъ поверхностямъ	252
а) Общія замѣчанія	—
б) Плоскость, касательная къ поверхности въ данной точкѣ послѣдней	254
в) Плоскость, касательная къ поверхности по данной прямолинейной производящей послѣдней	255
г) Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную вѣдную точку	257
д) Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной прямой линіи	260
е) Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную прямую линію	263
ж) Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной плоскости	—
з) Нормали къ кривымъ поверхностямъ	265
22. Тѣни кривыхъ поверхностей	266
а) Общія замѣчанія	—
б) Примѣры построенія тѣней	268
в) Элементы физической теоріи тѣней	283
23. Геометрическія мѣста	292
24. Построеніе тригранныхъ угловъ	301
25. Построеніе кинематическихъ пространственныхъ кривыхъ линій	304

Указатель именъ	311
Указатель предметовъ	312

ВВЕДЕНІЕ.

«Чертежъ—языкъ техника».

Гаспаръ Монжъ.

«Начертательная Геометрія—
грамматика этого языка».

В. И. Курдюмовъ.

При составленіи проектовъ различнаго рода сооруженій приходится изображать послѣднія на бумагѣ и составлять такъ называемые *чертежи* этихъ сооруженій, т. е. изображенія сооруженій, выполненныя при помощи чертежныхъ инструментовъ въ извѣстномъ масштабѣ.

При помощи чертежей техникъ можетъ легко и быстро передать лицу, достаточно подготовленному къ чтенію ихъ, понятіе объ устройствѣ и назначеніи изображаемыхъ сооруженій. Кромѣ того, при помощи тѣхъ же чертежей представляется возможнымъ рѣшать различныя задачи, относящіяся къ проектируемому сооруженію, напримѣръ, опредѣлять длины отрѣзковъ прямыхъ линій, величины угловъ между линіями и плоскостями, линіи сѣченія между различными поверхностями и т. п.

Однако, для того, чтобы можно было пользоваться чертежомъ въ указанномъ направленіи, необходимо, чтобы онъ былъ составленъ по извѣстнымъ правиламъ, чтобы между изображеніемъ на чертежѣ и изображаемымъ предметомъ существовала опредѣленная геометрическая зависимость, и чтобы изображеніе опредѣляло бы одинъ опредѣленный предметъ, а не нѣсколько.

Существуетъ цѣлый рядъ методовъ, при помощи которыхъ можно удовлетворить упомянутымъ условіямъ, напримѣръ, перспектива, аксонометрія, проекціи съ числовыми отмѣтками, ортогональныя проекціи и т. д. Различіе между этими методами опредѣляется способомъ проектированія изображаемаго предмета на плоскости чертежа.

Упомянутые методы составляютъ содержаніе науки, называемой Начертательной Геометріей.

«Начертательная Геометрія имѣетъ своимъ предметомъ изученіе методовъ изображенія формы существующихъ или воображаемыхъ предметовъ и рѣшеніе, при помощи этихъ изображеній, различныхъ геоме-

тричвскихъ задачъ, главнымъ образомъ относящихся къ опредѣленію формы, положенія и размѣровъ предметовъ».

Отдѣлъ Начертательной Геометріи, называемый *методомъ ортогональныхъ проекцій*, является наиболѣе распространеннымъ среди техниковъ, такъ какъ при помощи него съ наибольшей простотой, быстротой и точностью строятся изображенія различнаго рода сооружений, и рѣшаются задачи, относящіяся къ опредѣленію геометрическихъ элементовъ этихъ сооружений. Правда, изображенія сооружений, получаемыя въ этихъ проекціяхъ, не являются достаточно наглядными, такъ что для воспріятія въ умѣ и для мысленнаго возстановленія въ пространствѣ изображенныхъ предметовъ требуется нѣкоторый навыкъ и работа воображенія, однако, этотъ небольшой недостатокъ выкупается упомянутыми цѣнными свойствами этихъ изображеній.

Ниже излагается методъ ортогональныхъ проекцій.

Читатель, приступающій къ изученію этого метода, долженъ постоянно имѣть въ виду цѣль его изученія, именно: 1) научиться строить изображенія пространственныхъ предметовъ въ этихъ проекціяхъ. 2) быстро и точно рѣшать при помощи этого метода задачи по опредѣленію различнаго рода геометрическихъ элементовъ, относящихся къ изображаемымъ предметамъ. 3) быстро представлять себѣ формы пространственныхъ предметовъ по изображеніямъ ихъ въ этихъ проекціяхъ, составленныхъ другими лицами.

Всѣ эти три задачи рѣшаются при послѣдовательномъ изученіи курса и при постепенномъ развитіи воображенія, при чемъ нами настоятельно рекомендуется читателю непремѣнно продѣлывать самому на бумагѣ всѣ чертежи, помѣщенные въ курсѣ, при чемъ исполнять чертежи слѣдуетъ при помощи чертежныхъ принадлежностей: циркуля, треугольниковъ, линейки и т. д.

По мѣрѣ усложненія задачъ, на чертежѣ можетъ накапливаться много линій, соотвѣтствующихъ построеніямъ разнаго рода. Для большей легкости чтенія такихъ чертежей рекомендуется линіи, относящіяся къ разнымъ группамъ построеній, вычерчивать разными пунктирами или разными цвѣтами.

Кромѣ того, принято проекціи линій данныхъ видимыхъ, т. е. не закрываемыхъ отъ зрителя какими-нибудь непрозрачными плоскостями или тѣлами, вычерчивать тонкими сплошными черными линіями, проекціи же линій невидимыхъ вычерчивать такими же пунктирными линіями.

Геометрическіе элементы (линіи, углы), найденные по даннымъ условіямъ задачи, слѣдуетъ вычерчивать болѣе толстою черною или цвѣтною линіей: сплошною, если элементъ видимъ, и пунктирою, если онъ невидимъ.

Наконецъ, слѣдуетъ всегда имѣть въ виду, что рѣшеніе каждой за-

дачи должно состоять изъ двухъ главныхъ частей: 1) *рѣшенія ея въ пространство*, при которомъ выясняется, какія въ пространствѣ слѣдуетъ провести лиши, плоскости или поверхности для опредѣленія искомаго геометрическаго элемента; 2) *рѣшенія ея въ проекціяхъ*. *Нельзя приступать къ рѣшенію задачи въ проекціяхъ, не составивъ себѣ яснаго плана рѣшенія ея въ пространство*. Надо заранѣе знать, что слѣдуетъ чертить и къ какой цѣли стремиться при вычерчиваніи. Умѣстно здѣсь привести слова англійскаго военнаго инженера Георга Кларка, который, сравнивая между собою задачи математики и Начертательной Геометріи, говоритъ: ¹⁾ «Рѣшеніе математическихъ задачъ можетъ быть достигнуто тѣмъ, что на военномъ языкѣ называется *способомъ систематическаго наступленія*, иными словами, рѣшенія ихъ можно вести постепенно, хотя бы послѣдующіе шаги, ведущіе къ нимъ, напередъ и не видны, но рѣшенія задачъ Начертательной Геометріи можно предвидѣть гораздо ранѣе, нежели ихъ можно точно опредѣлить. Вся цѣль условій задачъ, равно какъ и каждый шагъ къ ихъ разрѣшенію могутъ быть одновременно охвачены воображеніемъ: *онѣ должны быть взяты штурмомъ*».

¹⁾ F. Wilson. «Descriptive Geometrie». New-York. 1898.

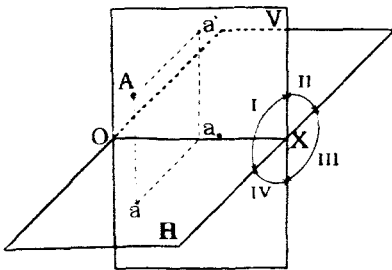
Ч А С Т Ь I.

Ортогональныя проекціи точекъ прямыхъ линий, плоскостей и многогранниковъ.

§ 1. Общее понятіе о методѣ ортогональныхъ проекцій. Проекціи точки.

Методъ ортогональныхъ проекцій впервые систематически былъ изложенъ французскимъ ученымъ Гаспаромъ Монжемъ, почему этотъ методъ иногда называютъ *методомъ Монжа*.

Сущность этого метода заключается въ слѣдующемъ (черт. 1):



Черт. 1.

Пусть дана въ пространствѣ точка A и двѣ взаимно перпендикулярныхъ плоскости V и H .

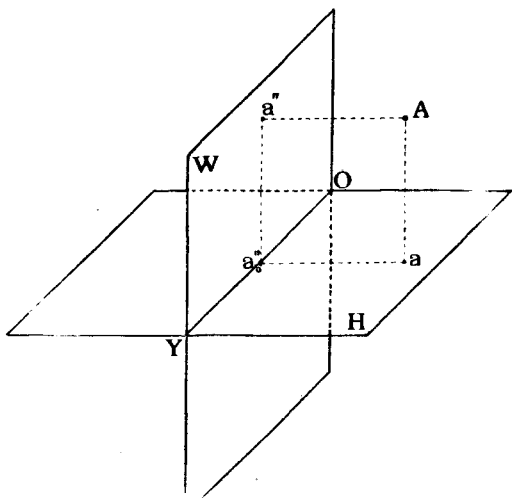
Проведемъ изъ точки A двѣ линіи, изъ которыхъ одна пусть будетъ перпендикулярна къ H , а другая къ V , и отмѣтимъ точки a и a' пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ H и V . Каждая изъ этихъ точекъ называется *прямоугольной проекціей* точки A на соотвѣтственную плоскость.

Совокупность же обѣихъ прямоугольныхъ проекцій a и a' точки A на двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ называется *ортогональными проекціями* точки A . Плоскости V и H называются *плоскостями проекцій*.

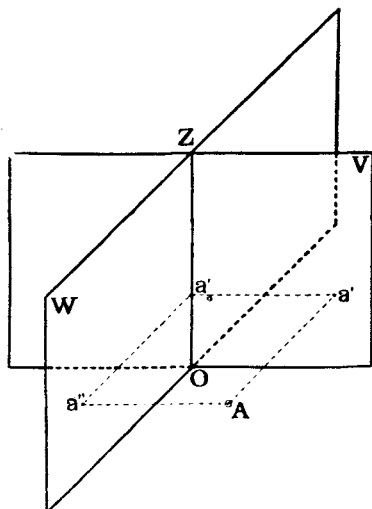
Одна изъ нихъ обыкновенно выбирается горизонтально, обозначается буквой H и называется *горизонтальной плоскостью проекцій*, другая проводится вертикально и называется *вертикальной плоскостью проекцій*.

Если эта плоскость расположена перпендикулярно къ горизонтальному лучу зрѣнія, какъ на чертежѣ 1, то она иногда называется *фасадной плоскостью* и обозначается буквою *V*.

Иногда одну изъ упомянутыхъ плоскостей *V* или *H* замѣняютъ плоскостью, одновременно перпендикулярной и къ *V* и къ *H* и называемой *второй вертикальной плоскостью проекцій* или *профильной плоскостью* и обозначаемой буквою *W* (черт. 2 и 3).



Черт. 2.



Черт. 3.

Прямоугольная проекція *a* точки *A* на горизонтальную плоскость *H* называется *горизонтальной проекціей* точки *A*. Прямоугольная проекція *a'* точки *A* на вертикальную плоскость *V* называется *вертикальной проекціей* точки *A*. Наконецъ, прямоугольная проекція *a''* точки *A* на профильную плоскость *W* называется *профильной проекціей* точки *A*.

Условимся въ дальнѣйшемъ точки въ пространствѣ обозначать большими буквами алфавита *A, B, C, D* и т. д., а ихъ проекціи—малыми буквами того же наименованія, при чемъ горизонтальныя проекціи будемъ обозначать малыми буквами безъ значковъ *a, b, c, d* и т. д., вертикальныя проекціи—малыми буквами съ однимъ значкомъ вверху справа *a', b', c', d'* и т. д., а профильныя проекціи—малыми буквами съ двумя значками вверху справа *a'', b'', c'', d''* и т. д. При такихъ условіяхъ проекціи напримѣръ, точки *A* будутъ обозначены слѣдующимъ образомъ: *a, a', a''*.

Линіи пересѣченія плоскостей проекцій называются *осями проекцій* и обозначаются, какъ показано на чертежахъ 1—3, буквами *OX, OY* и *OZ*.

Линіи Aa' и Aa'' , проектирующія точку A на плоскости V и W , называются *горизонтально проектирующими линіями*, а линія Aa , проектирующая ту же точку на H называется *вертикально проектирующей линіей*.

Каждая ось проекцій дѣлитъ двѣ изъ плоскостей проекцій на части, которыя называются *полами*.

Часть плоскости V , лежащая выше оси OX , называется *верхней полой V* , а лежащая ниже OX —*нижней полой V* .

Часть плоскости W , лежащая выше оси OY , называется *верхней полой W* , а лежащая ниже OY —*нижней полой W* .

Часть плоскости H , лежащая передъ осью OX , называется *передней полой H* , а лежащая сзади OX —*задней полой H* .

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ преимущественно пользоваться ортогональными проекціями точекъ на плоскостяхъ H и V .

Выведемъ нѣсколько теоремъ, относящихся къ ортогональнымъ пресекціямъ.

Теорема 1-я. Ортогональныя проекціи точки опредѣляютъ положеніе ея въ пространствѣ относительно плоскостей проекцій.

Обращаясь къ чертежу 1-му, замѣтимъ, что обѣ проектирующія линіи Aa и Aa' , а также и точки a и a' лежатъ въ одной и той же плоскости. Поэтому, если даны плоскости проекцій V и H и на нихъ намѣчены ортогональныя проекціи a и a' какой то точки A въ пространствѣ, то, возстановляя изъ a перпендикуляръ aA къ H , а изъ a' —перпендикуляръ $a'A$ къ V , получимъ одну единственную точку A въ пересѣченіи этихъ перпендикуляровъ.

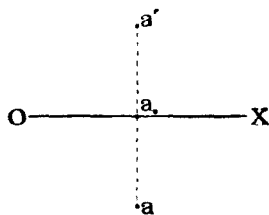
Плоскости V и H дѣлятъ все пространство на четыре угла: I-й—между верхней полой плоскости V и передней H ; II-й—между верхней полой плоскости V и задней H ; III-й—между нижней V и задней H и IV-й—между нижней V и передней H (черт. 1).

Для большаго удобства при геометрическихъ построеніяхъ плоскости H и V совмѣщаютъ другъ съ другомъ. Для этого вращаютъ плоскость V вокругъ оси OX до тѣхъ поръ, пока верхняя пола V не совпадегъ съ задней полой H , а нижняя пола V съ переднею H . Такимъ образомъ, всѣ линіи, которыя были расположены въ 2-хъ плоскостяхъ: въ горизонтальной H и вертикальной V , послѣ такого еовмѣщенія плоскостей будутъ лежать въ одной плоскости. Эту плоскость мы можемъ принять за плоскость чертежа.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что зритель находится въ предѣлахъ перваго угла пространства и можетъ видѣть только тѣ точки и линіи, которыя лежатъ въ предѣлахъ этого угла. Условимся проекціи

такихъ линій чертить сплошной чертою. Проекціи же линій невидимыхъ, т. е. лежащихъ во II, III и IV углахъ, будемъ чертить пунктиромъ.

Теорема 2-я. Горизонтальная и вертикальная проекціи одной и той же точки лежатъ на одной перпендикулярѣ къ оси проекцій. Доказательство: пусть намъ даны двѣ координатныя плоскости (черт. 1) H и V и проекціи точки A , лежащей въ I-мъ углу: вертикальная проекція a' и горизонтальная a . Такъ какъ линія Aa перпендикулярна къ плоскости H , а Aa' перпендикулярна къ плоскости V , то, очевидно, плоскость aAa' будетъ перпендикулярна къ оси проекцій OX . Слѣдовательно, линія aa_0 пересѣченія плоскости aAa' съ плоскостью H и линія $a'a_0$ пересѣченія той же плоскости съ плоскостью V будутъ перпендикулярны къ оси проекцій OX . Относительное положеніе линій и точекъ, лежащихъ на плоскости, не мѣняется отъ перемѣщенія этой плоскости. Такимъ образомъ, при совмѣщеніи V съ H вращеніемъ около OX , линіи aa_0 и $a'a_0$ останутся перпендикулярными къ OX . Линіи aa_0 и $a'a_0$ имѣютъ общую точку a_0 , при совмѣщеніи плоскостей V и H будутъ лежать въ одной плоскости и, наконецъ, обѣ перпендикулярны къ OX . Очевидно, онѣ должны расположиться на одной прямой aa' , перпендикулярной къ OX (черт. 4), что и требовалось доказать. Замѣтимъ, что $a'a_0 = Aa$ и $a_0a = Aa'$.



Черт. 4.

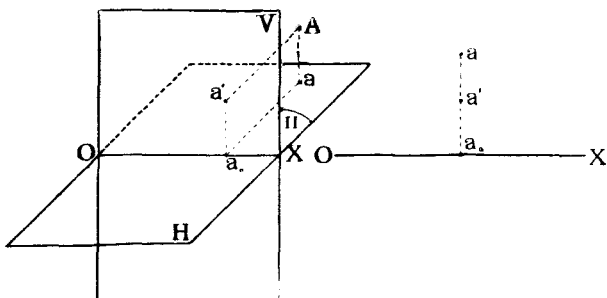
Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 3-я. Разстоянія вертикальной и горизонтальной проекцій точки до оси соответственно опредѣляютъ разстоянія самой точки до горизонтальной и вертикальной плоскостей проекцій.

Сообразно съ тѣмъ, какъ будутъ расположены данныя точки—въ I, II, III, IV углахъ, будетъ мѣняться и расположеніе ихъ проекцій. Когда данная точка A расположена въ I-мъ углу, то, по совмѣщеніи плоскостей, ея вертикальная проекція будетъ лежать надъ осью OX , а горизонтальная подъ осью OX (черт. 1 и 4). Когда точка A —во II-мъ углу (черт. 5 и 6), то ея вертикальная проекція будетъ расположена на верхней полѣ V , а горизонтальная на задней полѣ плоскости H , и при совмѣщеніи V съ H вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать надъ осью OX .

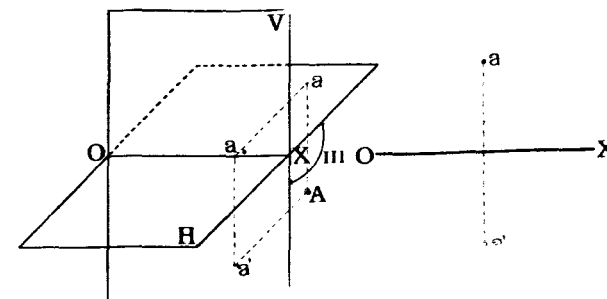
Когда точка A лежитъ въ III-мъ углу, то ея вертикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V , а горизонтальная—на задней полѣ H . При совмѣщеніи же плоскостей H и V ея горизонтальная проекція займетъ мѣсто выше оси OX , а вертикальная ниже OX (чертежи 7 и 8). Наконецъ, когда точка A лежитъ въ IV-мъ углу, ея вер-

вертикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V , а горизонтальная на передней полѣ H . При совмѣщеніи же плоскостей H в V



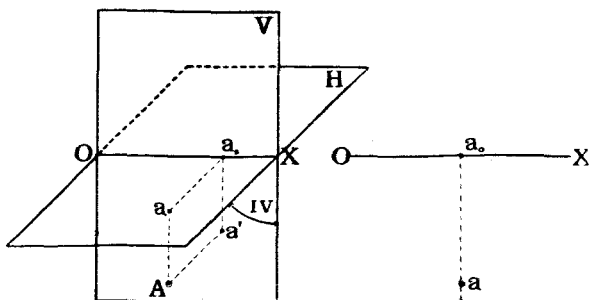
Черт. 5.

Черт. 6.



Черт. 7.

Черт. 8.



Черт. 9.

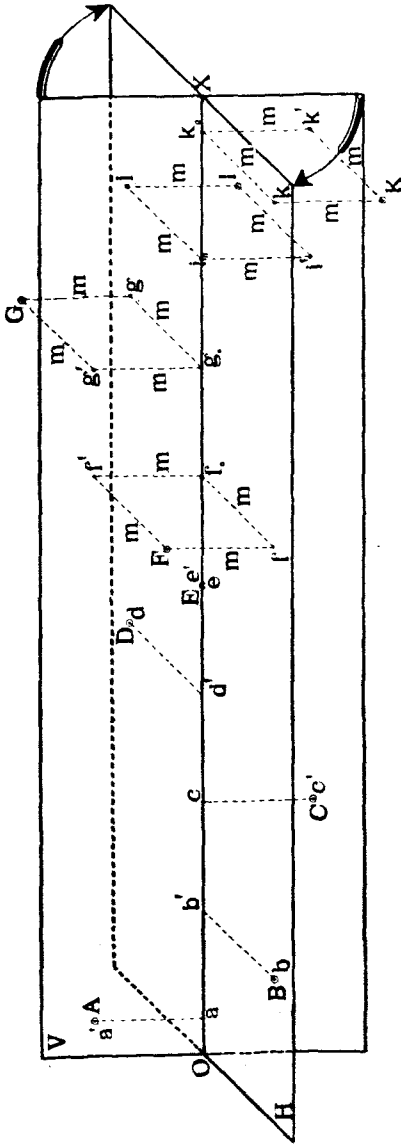
Черт. 10.

вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать ниже оси OX (черт. 9 и 10).

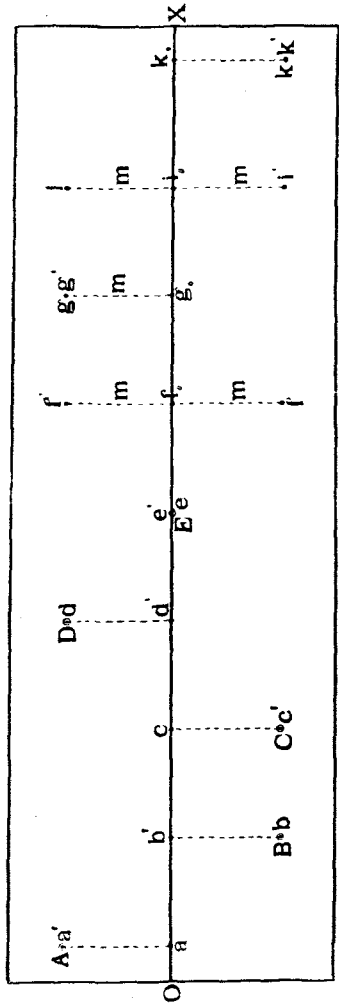
Если точка будетъ занимать какое-нибудь особенное положеніе отно-

тельно плоскостей проекцій, то это сейчас же отразится на расположении ея проекцій.

На черт. 11 и 12 показаны такі особенные случаи расположенія точекъ, при чемъ на чертежѣ 11 точки и плоскости проекцій показаны въ



Черт. 11.



Черт. 12.

пространствѣ, а на черт. 12 плоскости уже совмѣщены другъ съ другомъ, и точки обозначены ихъ проекціями.

- Точка *A* лежитъ на верхней полѣ *V*,
 » *B* » » передней » *H*,
 » *C* » » нижней » *V*,
 » *D* » » задней » *H*,
 » *E* » » оси *OX*.
 » *F* » въ I углу на равныхъ разстояніяхъ отъ *V* в *H*,
 » *G* » въ II » » » »
 » *I* » въ III » » » »
 » *K* » въ IV » » » »

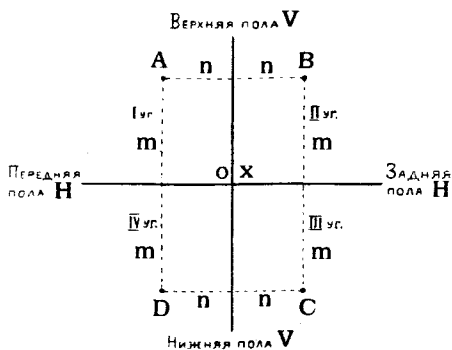
Условимся въ дальнѣйшемъ разстоянія точки отъ плоскостей проекцій, измѣряемая въ направленіи передъ *V* или надъ *B* считать положительными, а въ противоположныхъ направленихъ — отрицательными.

Разстоянія эти будемъ называть *координатами* точки.

Если координата положительная, то будемъ ставить передъ ея обозначеніемъ знакъ + или не будемъ ставить никакого знака, если же она отрицательная, то будемъ ставить знакъ —.

При такомъ условіи будемъ имѣть слѣдующіе знаки координатъ точекъ, расположенныхъ въ

разныхъ углахъ пространства и изображенныхъ на черт. 13, при чемъ на этомъ чертежѣ точки изображены въ проекціи на профильную плоскость:

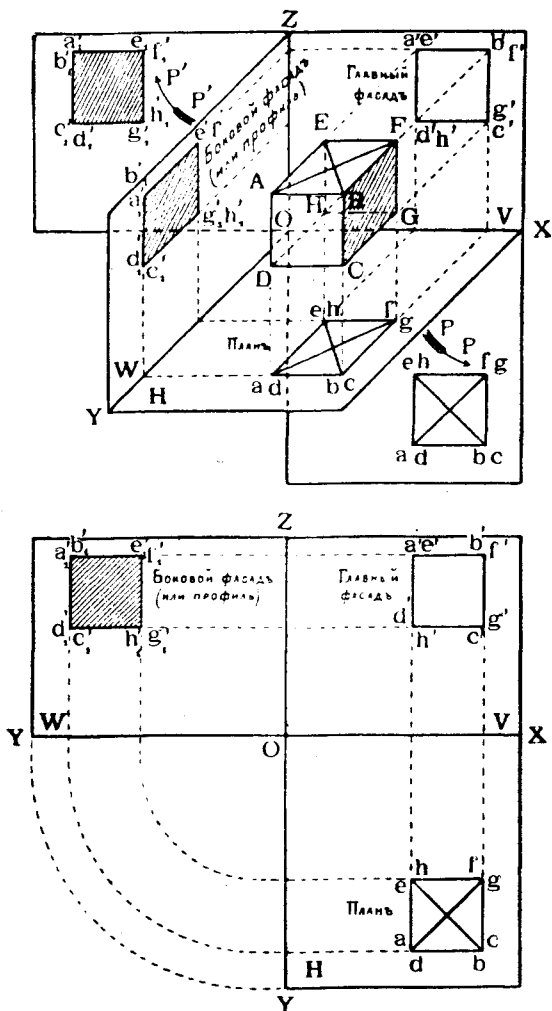


Черт. 13.

- Точка *A* — въ I углу; координаты + *m* и + *n*
 » *B* — въ II » » + *m* и — *n*
 » *C* — въ III » » — *m* и — *n*
 » *D* — въ IV » » — *m* и + *n*.

Въ дальнѣйшемъ рекомендуется читателю постепенно отвыкать пользоваться изображеніями подобными 1, 2, 3, 5, 7, 9 и 11 пространственнаго расположенія точекъ и плоскостей проекцій, а стараться изображать точки ихъ проекціями, предполагая плоскости совмѣщенными другъ съ другомъ, составляя чертежи подобные №№ 4, 6, 8, 10 и 12, представляя при этомъ себѣ въ умѣ пространственное расположеніе точекъ и плоскостей. При такомъ способѣ изученія предмета у читателя постепенно разовьется способность представлять и запоминать въ умѣ все

болѣе и болѣе сложныя сочетанія геометрическихъ формъ, разовьется во-
ображеніе и онъ овладѣтъ весьма цѣнной для инженеровъ способностью,
«мысленно видѣть въ пространствѣ».



Черт. 14 и 15.

Часто проекцію на V какого-нибудь предмета называютъ его глав-
нымъ *фасадомъ*, проекцію предмета на H называютъ его *планомъ*, а
проекцію предмета на W называютъ его *боковымъ* фасадомъ.

Если разрѣзать какой-нибудь предметъ плоскостью, параллельной пло-
скости W , и спроектировать полученную фигуру на W , то такая про-
екція называется *профилемъ* предмета относительно плоскости W .

Часто планомъ предмета называютъ проекцію на H фигуры, получаемой при сѣченіи предмета плоскостью, параллельной H .

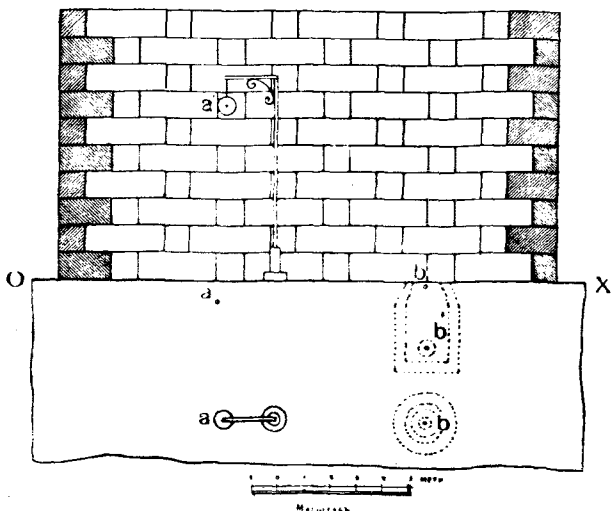
На черт. 14 показаны проекціи восьми точекъ, образующихъ вершины кубика $ABC...GH$. Проекція кубика на V даетъ главный фасадъ его, на H — планъ и на W — боковой фасадъ или профиль по плоскости $BFGC$.

Если разрѣзать плоскости H в W по линіи OY , совмѣстить H съ V , вращая H по стрѣлкѣ pp' вокругъ оси OX , и совмѣстить W съ V , вращая W по стрѣлкѣ $p'p''$ вокругъ оси OZ , то получится фигура, изображенная на черт. 15.

Чертежъ, подобный чертежамъ 12 или 15, на которомъ показаны проекціи фигуры при совмѣщеніи H съ V или W съ V , называется *этюрой* (отъ французскаго слова *ériger* — улучшить, *ériger* — буквально улучшенное изображеніе, чертежъ).

Условимся въ дальнѣйшемъ подъ словами «найти или опредѣлить точку» понимать выраженіе: найти или опредѣлить проекціи точки.

Задача 1. На чертежѣ 16 въ ортогональныхъ проекціяхъ изображены: каменная стѣна, фасадъ которой совпадаетъ съ плоскостью V , дорога, поверхность которой сов-



Черт. 16.

падаетъ съ плоскостью H . На дорогѣ стоитъ столбъ съ электрическимъ фонаремъ, подъ дорогой имѣется колодезь съ пожарнымъ водопроводнымъ краномъ.

Требуется опредѣлить: 1) разстоянія (въ метрахъ) центра A фонаря отъ стѣны и отъ мостовой, 2) разстояніе центра B врана отъ стѣны и отъ мостовой.

Рѣшеніе. Измѣряемъ циркулемъ разстоянія точекъ a' , a , b , b' до оси OX и, пользуясь масштабомъ, получаемъ:

Расстояние A до стѣны	равно $a a_0$	— 5 метр.
” A до мостовой	” $a' a_0$	— $6\frac{1}{2}$ ”
” B до стѣны	” $b b_0$	— 5 ”
” B до мостовой	” $-b' b_0$	— $2\frac{1}{2}$ ”

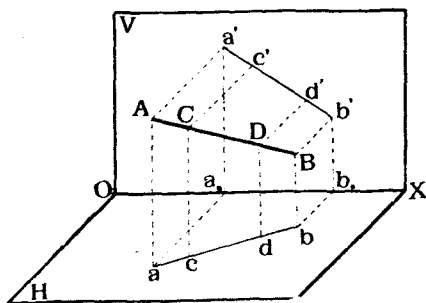
Знакъ минусъ передъ ординатой $b' b_0$ показываетъ, что точка B находится подъ мостовой.

§ 2. Прямая линия.

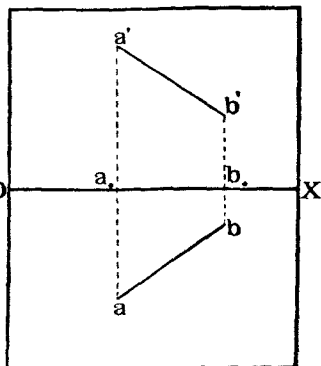
а) Заданіе прямой линіи.

Положеніе прямой линіи въ пространствѣ опредѣляется положеніемъ двухъ ея точекъ. Поэтому для заданія прямой линіи въ ортогональныхъ проекціяхъ достаточно имѣть проекціи какихъ-нибудь двухъ точекъ этой прямой, напримѣръ, концовъ отрезка ея.

Пусть, напримѣръ, (черт. 17) данъ въ пространствѣ отрезокъ AB прямой линіи. Спроектируемъ концы его A и B на плоскости V и H ; тогда



Черт. 17.



Черт. 18.

получимъ проекціи этихъ точекъ: горизонтальныя a и b и вертикальныя a' и b' . Возьмемъ на прямой AB еще нѣсколько точекъ, напримѣръ, C и D и спроектируемъ ихъ на плоскость H . Линіи, проектирующія эти точки, будутъ параллельны линіямъ Aa и Bb и будутъ лежать въ одной и той же вертикальной плоскости $AaBb$, которая называется *плоскостью, вертикально проектирующей линію AB* . Эта плоскость пересѣчетъ плоскость H по линіи ab , которая и называется *горизонтальной проекціей линіи AB* . На линіи ab расположатся, очевидно, горизонтальныя проекціи c , d всѣхъ точекъ C , D самой прямой AB .

Разсуждая подобнымъ же образомъ, получимъ, что линія $a'b'$, соединяющая вертикальныя проекціи точекъ A и B , будетъ служить *вертикальной проекціей линіи AB* и опредѣлится, какъ линія сѣченія пло-

скости V съ плоскостью $Aa'Bb'$, называемой *плоскостью, горизонтально-проектирующей линію AB* .

На черт. 18 показаны проекціи линіи AB при совмѣщеніи V съ B , при чемъ, согласно теоремѣ 2-й, точки a' и a , равно какъ и точки b' и b , попарно будутъ лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX .

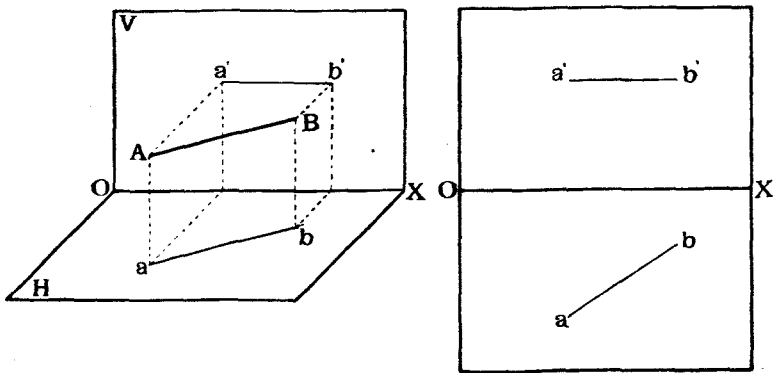
б). *Проекціи прямой линіи при разныхъ положеніяхъ ея относительно V и H .*

Разсмотримъ, какъ отражаются различныя положенія прямой на положеніи и видѣ ея ортогональныхъ проекцій.

На чертежахъ 17 и 18 прямая была задана случайнымъ образомъ.

Если прямая AB параллельна H' (черт. 19), то плоскость, горизонтально проектирующая ее на V , будетъ также параллельна H и пересѣчетъ V по линіи $a'b'$, которая будетъ служить вертикальной проекціей AB и будетъ параллельна оси OX . Кромѣ того, горизонтальная проекція ab будетъ равна и параллельна отрѣзку AB прямой. Въ этомъ случаѣ, какъ говорятъ, прямая AB проектируется на H *безъ искаженія*.

Кромѣ того, разстояніе вертикальной проекціи $a'b'$ до оси OX равно разстоянію самой прямой AB до плоскости H . На черт. 20 показаны проекціи такой прямой при совмѣщеніи V съ H .



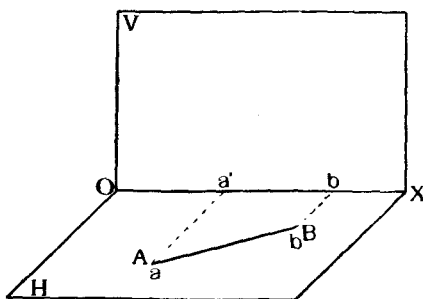
Черт. 19.

Черт. 20.

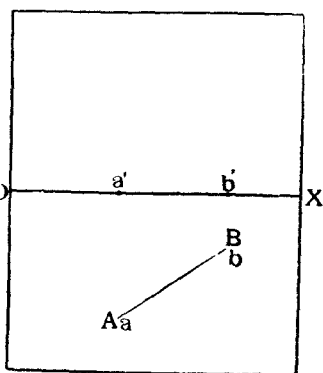
Если прямая AB лежитъ въ H (черт. 21 и 22), то она совпадетъ съ своей горизонтальною проекціей ab , вертикальная же проекція ея $a'b'$ совпадетъ съ осью.

Если прямая AB параллельна V (черт. 23 и 24), то она на V спроектируется безъ искаженія; горизонтальная же проекція будетъ параллельна OX . Разстояніе горизонтальной проекціи ab до оси OX равно разстоянію самой прямой AB до V .

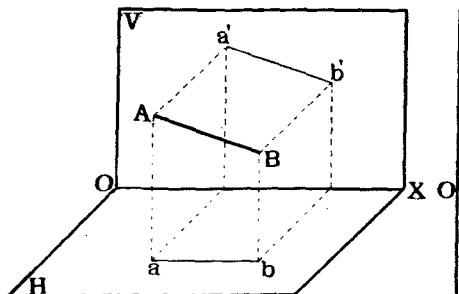
Если прямая AB лежит на V (черт. 25 26), то она совпадет со



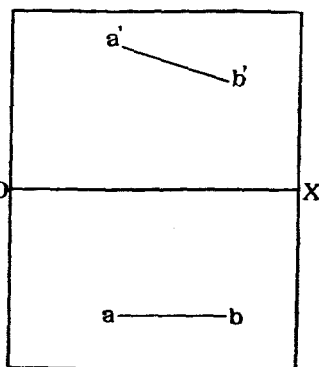
Черт. 21.



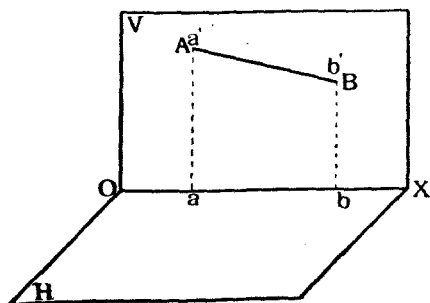
Черт. 22.



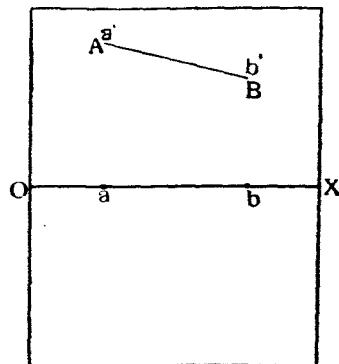
Черт. 23.



Черт. 24.



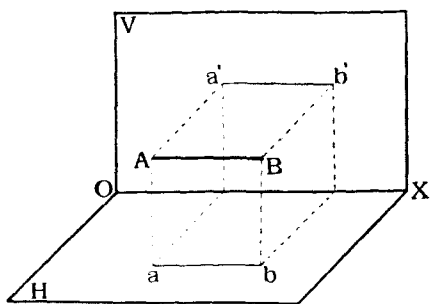
Черт. 25.



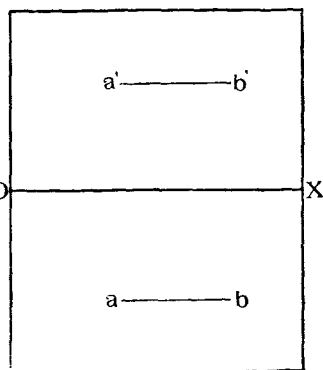
Черт. 26.

своей вертикальной проекцией $a'b'$, горизонтальная же ее проекция ab совпадет с осью OX .

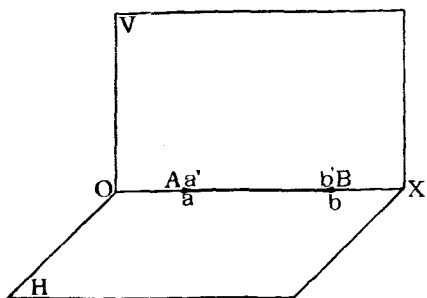
Если прямая AB параллельна оси OX (черт. 27 и 28), то она



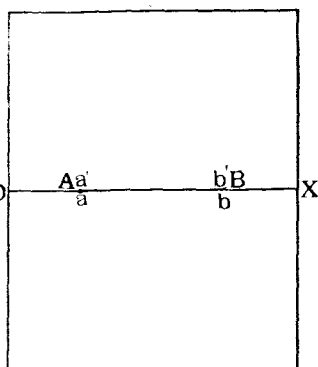
Черт. 27.



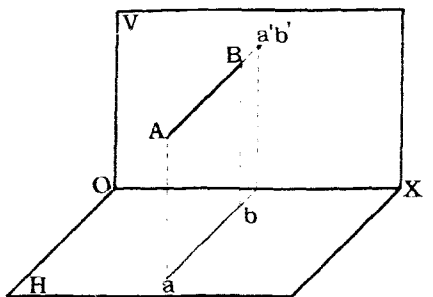
Черт. 28.



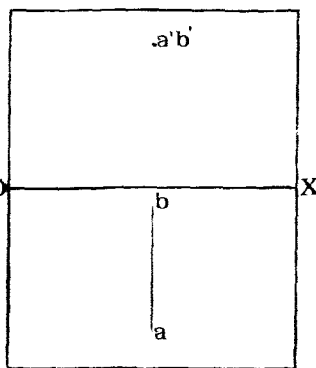
Черт. 29.



Черт. 30.



Черт. 31.

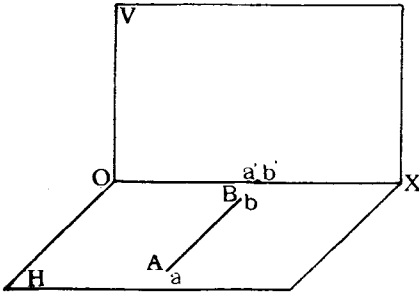


Черт. 32.

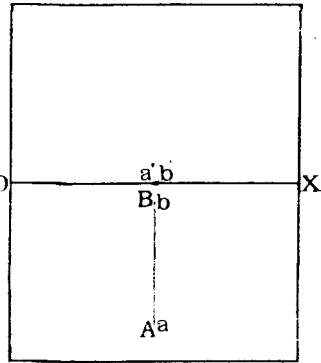
спроектируется без искажения на V и на H , и обе ее проекции будут параллельны OX .

Если прямая AB совпадаетъ съ осью OX (черт. 29 и 30), то она совпадаетъ и съ обѣими своими проекціями, сливающимися съ OX .

Если прямая AB перпендикулярна къ V (черт. 31 и 32), то она спроектируется на V въ видѣ точки, или, какъ иногда говорятъ, она

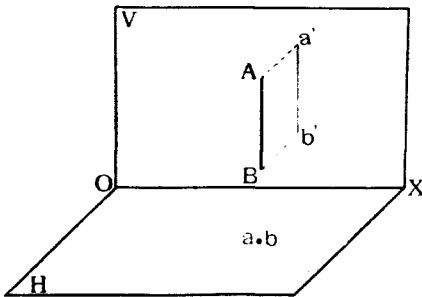


Черт. 33.

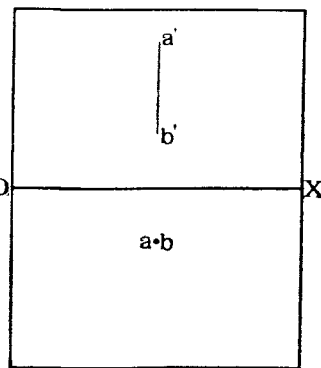


Черт. 34.

исчезаетъ въ своей проекціи на V . Для опредѣленности задания необходимо эту точку обозначить двумя буквами $a'b'$, показывающими, что въ этой точкѣ сливаются по крайней мѣрѣ двѣ точки A и B прямой. Горизонтальная проекція прямой будетъ перпендикулярна къ оси OX .



Черт. 35.



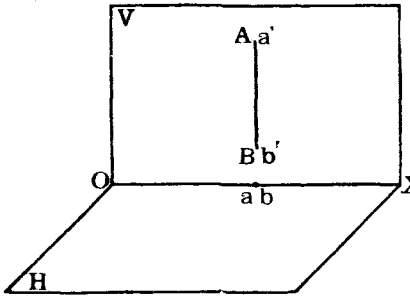
Черт. 36.

Если прямая AB лежитъ въ H и перпендикулярна къ V (черт. 33 и 34), то вертикальная проекція ея $a'b'$ будетъ въ видѣ точки и расположится на оси OX ; горизонтальная же проекція ab будетъ перпендикулярна къ оси OX и совпадетъ съ самой прямой AB .

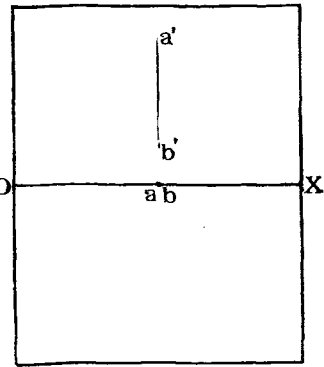
Если прямая AB перпендикулярна къ H (черт. 35 и 36), то она

исчезаетъ въ своей горизонтальной проекціи, проектируясь на H въ видѣ точки ab , вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ перпендикулярна къ OX .

Если прямая AB , оставаясь перпендикулярной къ H , будетъ лежать въ плоскости V (черт. 37 и 38), то горизонтальная проекція ея,



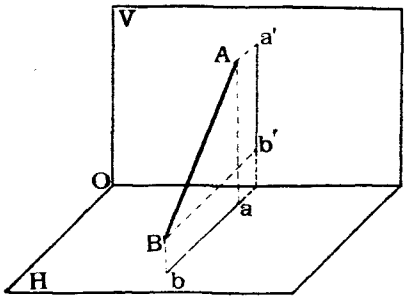
Черт. 37.



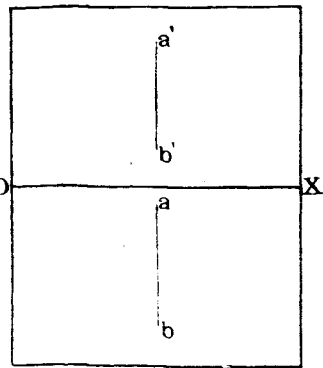
Черт. 38.

обращаясь въ точку ab , расположится на оси OX ; вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ попрежнему перпендикулярна къ OX .

Если прямая AB лежитъ въ профильной плоскости, т. е. въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX (черт. 39 и 40), то она называется



Черт. 39.



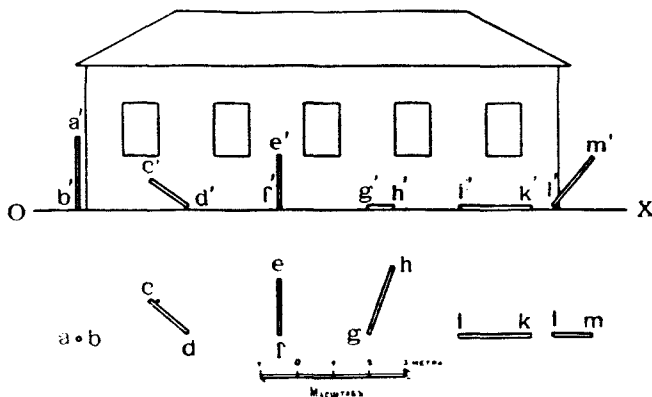
Черт. 40.

профильной линіей, и ея проекціи ab и $a'b'$ расположатся по линіямъ сѣченія профильной плоскости съ V и H . При совмѣщеніи V съ H обѣ проекціи расположатся на одной прямой линіи, перпендикулярной къ оси OX .

Условимся въ дальнѣйшемъ подѣ словами: «найти или опредѣлить прямую линію» понимать «найти или опредѣлить проекціи прямой линіи».

Задача 2. На чертежѣ 41 изображены въ ортогональныхъ проекціяхъ: домъ, фасадъ котораго совпадаетъ съ плоскостью V , и столбы разрушеннаго забора. Принимаемая поверхность земли совпадающей съ H , опредѣлить: 1) положеніе столбовъ забора относительно земли и стѣны дома; 2) длину (въ метр.) столбовъ, предполагая, что они всѣ одинаковые и 3) разстоянія концовъ столбовъ отъ стѣны и отъ земли.

Рѣшеніе: Столбъ AB стоитъ вертикально, и длина его, проектируясь на V безъ искаженія, равна $a'b'$ или по масштабу 2 метра. Разстояніе концовъ его отъ стѣны равно разстоянію точки ab до осп OX и равно по масштабу $3\frac{1}{2}$ метрамъ.



Черт. 41.

Столбъ CD наклоненъ къ стѣнѣ влѣво. Разстояніе конца его C отъ стѣны равно $2\frac{1}{2}$ метра, а отъ земли $3\frac{1}{4}$ метра.

Столбъ EF наклоненъ концомъ E къ стѣнѣ и располагается въ профильной плоскости. Разстояніе конца его E отъ V равно 2 метрамъ и отъ H — $1\frac{1}{2}$ метрамъ.

Столбъ GH лежитъ на землѣ. Разстояніе конца его H отъ стѣны равно $1\frac{1}{2}$ метр., конца G отъ стѣны— $3\frac{1}{2}$ метрамъ.

Столбъ IK лежитъ на землѣ параллельно стѣнѣ въ разстояніи отъ нея $3\frac{1}{2}$ метр.

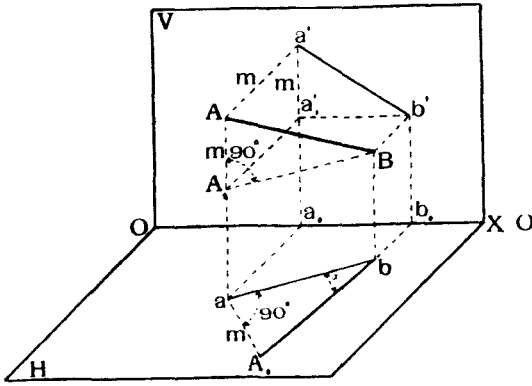
Столбъ LM расположенъ параллельно стѣнѣ и наклоненъ къ землѣ. Разстояніе конца его M отъ стѣны равно $3\frac{1}{2}$ метрамъ, а отъ земли— $1\frac{1}{2}$ метрамъ.

с) *Опредѣленіе длины отрезка прямой линіи и угловъ наклона ея къ V и H .*

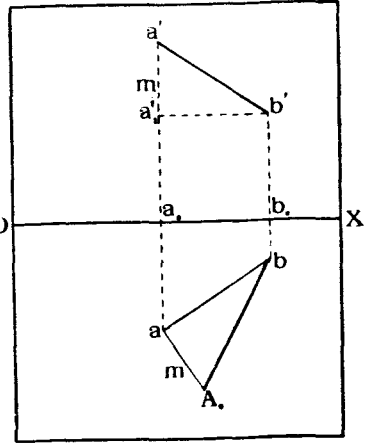
Пусть данъ въ пространствѣ отрезокъ AB прямой линіи (черт. 42). Построимъ его проекціи ab и $a'b'$.

Проведемъ черезъ точку B прямую BA_1 , параллельную ab , до пересѣченія съ линіей Aa въ точкѣ A_1 ; изъ точки b' проведемъ прямую $b'a'_1$, параллельную OX , до пересѣченія въ точкѣ a'_1 съ $a'a_0$, перпендикулярной къ OX . Зная, что $ab = A_1B$ и разность высотъ $Aa - Bb = AA_1 = a'a'_1$, мы легко можемъ построить на ab въ плоскости H такой прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго A_0b выразитъ величину отрезка AB . Одинъ катетъ ab данъ, другой катетъ $A_0a = a'a'_1$, т. е. выражаетъ разность высотъ концовъ вертикальной проекціи отрезка надъ осью OX . На черт. 43 всѣ эти построенія исполнены въ проекціяхъ. Итакъ, длина

отрѣзка AB въ пространствѣ опредѣляется, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ катетовъ котораго равенъ длинѣ горизонтальной проекціи отрѣзка, а другой — разности m разстояній концовъ вертикальной проекціи того же отрѣзка отъ оси OX .

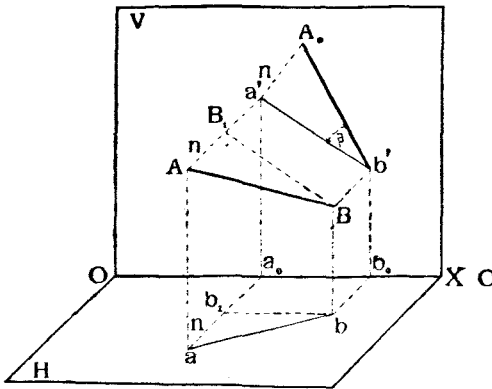


Черт. 42.

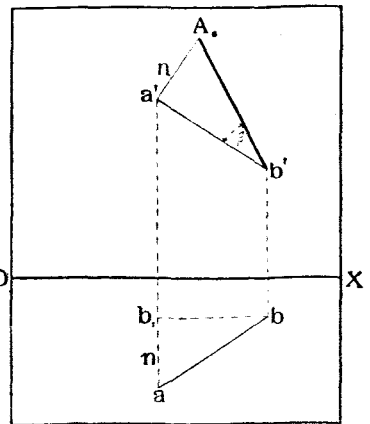


Черт. 43.

Ту же величину отрѣзка AB можно опредѣлить и инымъ способомъ (черт. 44). Проведемъ изъ точки B линію, параллельную $a'b'$, до встрѣчи



Черт. 44.



Черт. 45.

съ Aa' въ точкѣ B_1 . Получаемъ прямоугольный треугольникъ съ прямымъ угломъ при B_1 . Два катета этого треугольника извѣстны: одинъ катетъ $BB_1 = a'b'$, другой равенъ разности разстояній концовъ прямой AB до плоскости V или концовъ ab до оси OX . Поэтому величина

отрѣзка прямой AB въ пространствѣ опредѣляется, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ котораго является величина вертикальной проекціи, а другимъ—разность разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси. Для опредѣленія AB во второмъ случаѣ достаточно построить въ плоскости V на $a'b'$ прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго $a'b'$ (черт. 45), а другой равенъ разности n разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси OX ; гипотенуза A_0b' и будетъ выражать истинную длину отрѣзка AB .

Комбинируя эти два случая, получаемъ слѣдующую теорему.

Теорема 4. Величина отрѣзка прямой линіи въ пространствѣ выражается гипотенузой прямоугольнаго треугольника, одна изъ катетомъ котораго служить одна изъ проекцій даннаго отрѣзка, а другимъ—разность разстояній концовъ другой его проекціи до оси OX .

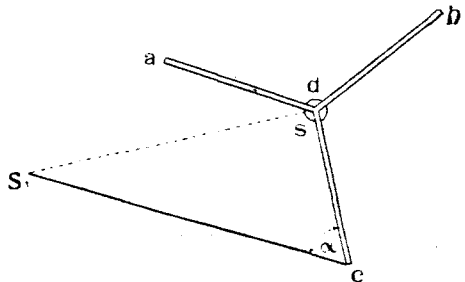
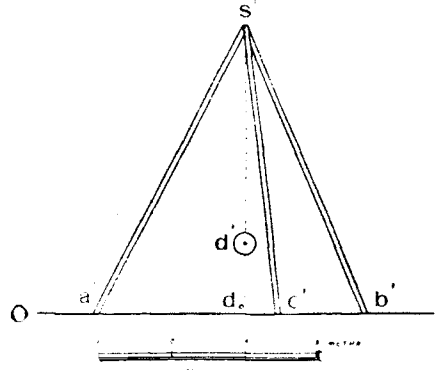
Разсматривая прямоугольный Δ -къ AA_1B (черт. 42), нетрудно замѣтить, что уголь α между линіями AB и A_1B выражаетъ уголь наклона прямой AB къ плоскости H и онъ опредѣляется, такъ сказать, попутно, на черт. 43, при нахожденіи длины отрѣзка AB ($\angle abA_0 = \angle ABA_1$). Подобнымъ же образомъ изъ чертежа 45 опредѣляется и уголь β наклона прямой AB къ плоскости V , такъ какъ $\Delta A_0b'a'$ равенъ Δ -ку ABB_1 (черт. 44), въ которомъ уголь β между линіями AB и B_1B выражаетъ уголь наклона AB къ V .

Задача № 3.

На черт. 46 дано въ ортогональныхъ проекціяхъ изображеніе деревянной треноги ABC , къ верхнему узлу которой S подвѣшенъ на цѣпи SD грузъ D . Опредѣлить:

- 1) Длины ногъ AS , BS и CS треноги.
- 2) Углы ихъ наклона къ землѣ H .
- 3) Длину цѣпи SD .

Рѣшеніе: Разсматривая горизонтальную проекцію треноги, видимъ, что длины $as = bs = cs$. Изъ вертикальной же проекціи треноги видно, что разность разстояній $S'd_0$ конца S всѣхъ треногъ надъ ихъ основаніями одна и та же. Поэтому заключаемъ, что и длины всѣхъ трехъ ногъ треноги и углы наклона ихъ къ землѣ будутъ одинаковыми, и достаточно опредѣлить длину и уголь наклона къ землѣ одной изъ нихъ, напримѣръ, SC .



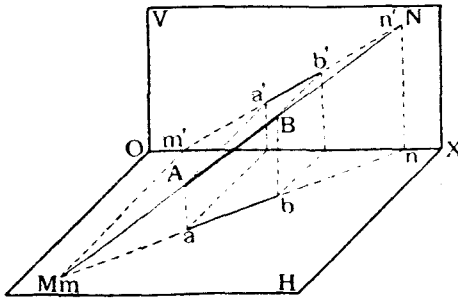
Черт. 46.

и уголь наклона къ землѣ одной изъ нихъ,

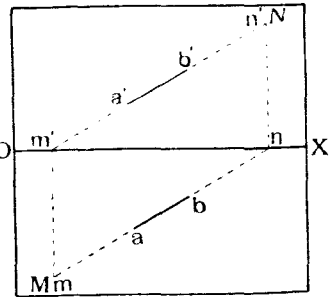
На основании теоремы 4-й строим прямоугольный треугольник cdS_1 , одним катетом которого принимаем dc , а другими $dS_1 = d_0s'$. Длина гипотенузы S_1c равная по масштабу 4,1 метра, и будет равна длине каждой ноги треноги, а угол $\alpha = 60^\circ$ между S_1c и dc равен углу наклона ног к землѣ. Длина пѣпи SD , которая висит вертикально, и следовательно, проектируется на V без искаженія, измѣрится длиной отрѣзка $s'a'$ и равна по масштабу 3 метр.

d) *Определение слѣдовъ прямой линіи.*

Слѣдами прямой линіи называются точки пересѣченія ея съ плоскостями проекцій. Въ общемъ случаѣ прямая линія имѣетъ два слѣда: *горизонтальный* M (черт. 47), т. е. точку пересѣченія ея съ плоскостью H , и *вертикальный* N , точку пересѣченія ея съ плоскостью V . Разсматривая чертежъ 47, нетрудно видѣть, что точка M , совпадая со своей



Черт. 47.



Черт. 48.

горизонтальной проекціей, будетъ имѣть вертикальную проекцію m' на оси; но въ то же время m' должно находиться и на продолженіи линіи $a'b'$, такъ какъ сама точка M лежитъ на продолженіи AB .

Подобнымъ же образомъ вертикальный слѣдъ N совпадетъ со своей вертикальной проекціей n' , горизонтальная же проекція его n будетъ лежать на оси въ точкѣ пересѣченія послѣдней съ горизонтальной проекціей ab прямой.

Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему для опредѣленія слѣдовъ прямой линіи, заданной въ ортогональныхъ проекціяхъ:

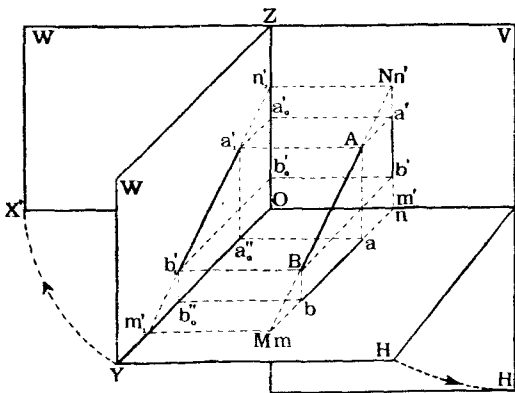
Теорема 5. Для нахождения горизонтальнаго слѣда прямой линіи достаточно продолжить вертикальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью, въ полученной точкѣ возстановить въ плоскости H перпендикуляръ къ OX и продолжить его до пересѣченія съ горизонтальной проекціей прямой въ точкѣ, которая и будетъ искомымъ слѣдомъ.

Для нахождения вертикальнаго слѣда достаточно продолжить горизонтальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью, въ полученной

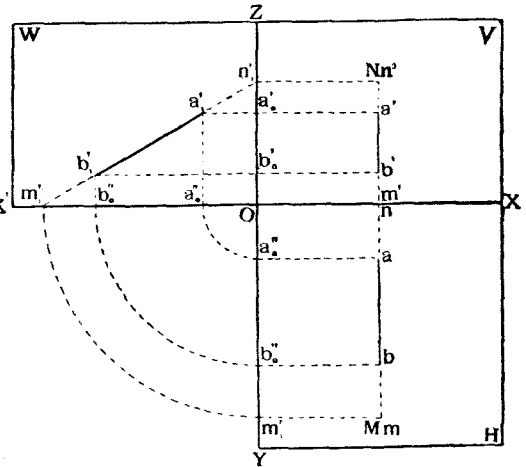
точкѣ возстановить въ плоскости V перпендикуляръ къ OX и продолжить его до пересѣченія съ вертикальною проекціей прямой въ точкѣ, которая и будетъ искомымъ слѣдомъ.

На чертежѣ 48 всѣ эти построенія исполнены въ ортогональныхъ проекціяхъ.

Слѣды *профильной* линіи на основаніи этого правила найти нельзя, такъ какъ перпендикуляры къ оси, на которыхъ лежатъ искомыя слѣды, не будутъ пересѣкаться съ соответствующими проекціями прямой, а сольются съ ними. Для опредѣленія же слѣдовъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ:



Черт. 49.



Черт. 50.

Пусть дана въ пространствѣ (черт. 49) профильная прямая линія AB и показаны ея проекціи ab и $a'b'$. Спроектируемъ AB на вторую вертикальную (профильную) плоскость проекцій W . Очевидно, проекція $a_1'b_1'$ на этой плоскости будетъ равна и параллельна самому отрезку AB прямой въ пространствѣ. Продолжимъ $a_1'b_1'$, до пересѣченія съ осями OY и OZ въ точкахъ m_1' и n_1' . Нетрудно видѣть, что разстоянія точекъ m_1' и n_1' отъ оси OX будутъ равны разстояніямъ слѣдовъ M и N прямой AB до той же оси, т. е.

$$m_1'O = Mm'$$

и

$$n_1'O = Nn.$$

Кромѣ того проекціи отрезка $a_1'b_1'$ на оси OY и OZ будутъ соответственно равны проекціямъ AB на H и V , т. е.

и

$$a_0''b_0'' = ab$$

$$a_0'b_0' = a'b'.$$

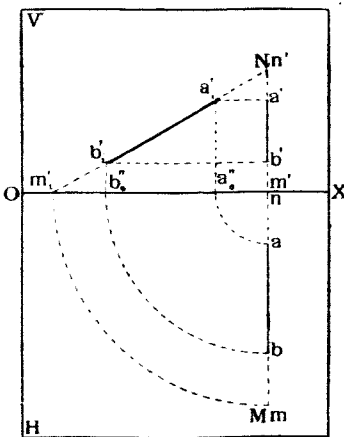
Наконецъ:

$$\begin{aligned} Oa_0'' &= m'a \\ Ob_0'' &= m'b \\ Oa_0' &= na' \\ Ob_0' &= nb'. \end{aligned}$$

Разрѣжемъ теперь плоскости W и H по линіи OY и совмѣстимъ W съ V , вращая W влѣво вокругъ OZ , и H съ V , вращая H внизъ вокругъ OX . Тогда получимъ фигуры, изображенныя на черт. 50.

Изъ рассмотрѣнія этого чертежа, гдѣ профильная прямая задана уже въ ортогональныхъ проекціяхъ, видно, что для нахождения слѣдовъ этой прямой необходимо сдѣлать слѣдующія построения:

- 1) Провести черезъ точку O оси OY и $OZ \perp OX$.
- 2) Найти проекціи a_0'' и b_0'' точекъ a и b на ось OY .
- 3) Описать изъ точки O какъ изъ центра дуги радиусами Oa_0'' и Ob_0'' до пересѣченія съ продолженіемъ оси OX въ точкахъ a_0'' и b_0'' .
- 4) Возстановить въ этихъ точкахъ перпендикуляры къ OX и замѣнить точки a_1' и b_1' пересѣченія ихъ съ соответственными линіями, параллельными OX и проведенными изъ a' и b' .
- 5) Соединить точки a_1' и b_1' и продолжить линію a_1' и b_1' до пересѣченія съ линіей OX' въ точкѣ m_1' и съ линіей OZ въ точкѣ n_1' .
- 6) Провести изъ n_1' линію, параллельную OX , до пересѣченія съ продолженіемъ $a'b'$ въ точкѣ N .
- 7) Засѣчь линію OY дугою круга радиуса Om_1' изъ центра O въ точкѣ m_1' и провести изъ m_1' , линію параллельную OX , до пересѣченія съ продолженіемъ ab въ точкѣ M .



Черт. 51.

Точки M и N и будутъ искомыми слѣдами профильной линіи.

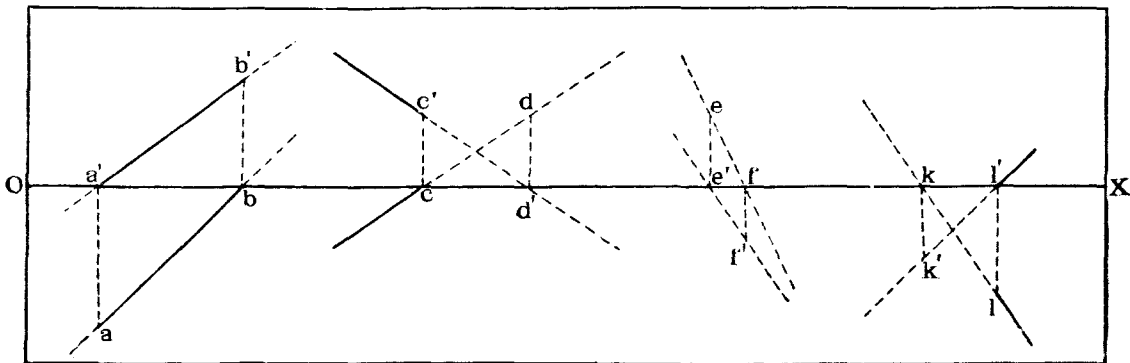
Вмѣсто профильной плоскости W , проведенной въ сторонѣ отъ линіи AB , можно было бы провести профильную плоскость черезъ линію AB и совмѣстить эту плоскость съ V . Тогда въ ортогональныхъ проекціяхъ построенія нѣсколько упрощается, какъ это видно на чертежѣ 51.

Такъ какъ слѣды линіи раздѣляютъ прямую на части, лежація въ разныхъ углахъ пространства, то они будутъ служить и границами видимости прямой.

Поэтому проекціи прямой, лежащей въ предѣлахъ перваго угла про-

пространства, мы должны, согласно высказанному раньше (стр. 2) условию чертить сплошной чертой, а продолжения их, какъ проекціи невидимыхъ частей прямой, лежащихъ въ другихъ углахъ пространства, пунктиромъ.

Итакъ, границами видимости прямой являются ея слѣды на передней полѣ плоскости H и на верхней полѣ плоскости V . На чертежѣ 52 показаны проекціи и обозначены видимыя и невидимыя части четырехъ прямыхъ AB , CD , EF и KL , изъ которыхъ первая проходитъ въ IV, I и II углахъ, вторая—въ I, II и III, третья—въ II, III и IV, а четвертая—въ I, III и IV.



Черт. 52.

Буквами обозначены слѣды прямыхъ.

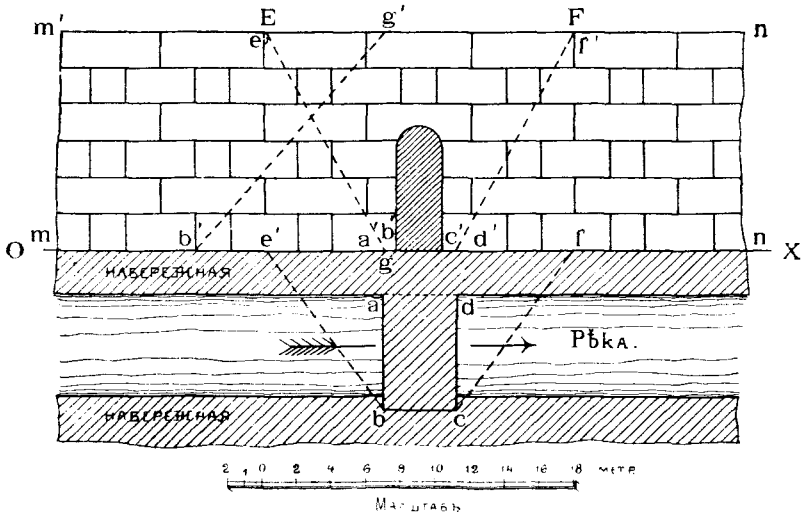
Предлагаемъ читателю показать на каждой изъ этихъ прямыхъ по три точки, лежащихъ въ разныхъ углахъ.

Замѣтимъ, что въ большинствѣ случаевъ нѣтъ необходимости прочерчивать линіи, подобныя линіямъ $a'a$, $b'b$ и т. д. (черт. 45), перпендикулярныя къ OX и соединяющія разноименныя проекціи одной и той же точки. Одинаковыя буквы a и a' , b и b' и т. д., поставленныя у проекцій точки уже показываютъ, что эти точки находятся на одномъ перпендикулярѣ къ оси.

Задача № 4. На чертежѣ 53 изображены въ ортогональныхъ проекціяхъ: каменная стѣна съ воротами, рѣка съ набережными и подъемный мостъ $ABCD$ съ осью вращенія AD . Фасадъ стѣны совпадаетъ съ плоскостью V , а поверхность моста и набережной—съ плоскостью H . По верхнему краю стѣны должны быть укрѣплены два блока для цѣпей, поднимающихъ мостъ и прикрѣпляемыхъ къ концамъ его B и C . Когда мостъ опущенъ, то длины цѣпей между каждымъ блокомъ и соответствующимъ концомъ моста равны по 8 метрамъ. Определить положеніе блоковъ на краю стѣны.

Рѣшеніе. Концы оси каждой цѣпи должны лежать на плоскостяхъ проекцій, т. е. будутъ являться слѣдами этой оси на V и H . Вертикальныя проекціи этихъ концовъ каждой оси будутъ находиться: одна на линіи $m'm'$, вертикальной проекціи верхняго края стѣны, другая—на оси OX . Разность разстояній концовъ вертикальной проекціи каждой цѣпи будетъ равна разстоянію между линіями $m'n'$

и OX , т. е. длинѣ $g'b'$. Зная же длину самой цѣпи (8 метр.), нетрудно, припоминая теорему 4-ю, построить прямоугольный треугольникъ $b_1'g'b'$, у котораго гипотенуза равнялась бы 8 метр., одинъ катетъ былъ бы $g'b'$. Тогда другой катетъ $b_1'b'$ будетъ равенъ длинѣ горизонтальной проекціи цѣпи.



Черт. 53.

Засѣкая пазъ точки b ось OX дугою круга радиуса, равнаго $b_1'b'$, получимъ точку e . Линія be и будетъ горизонтальной проекціей оси цѣпи. Восстанавливая въ V пазъ точки e перпендикуляръ къ OX до пересѣченія съ $m'n'$, получимъ точку e' , вертикальную проекцію центра блока E . Линія BE ($be, b'e'$) и будетъ искомою осью цѣпи. Ось другой цѣпи CF ($cf, c'f'$) будетъ расположена справа отъ моста симметрично съ лѣвой цѣпью.

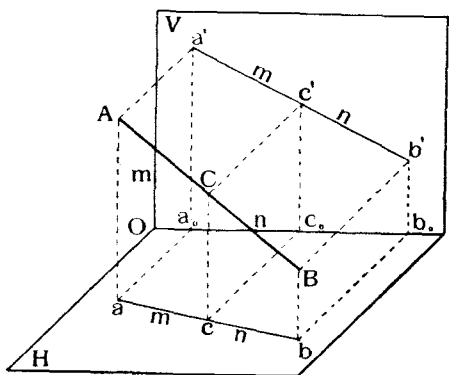
е) Дѣленіе линіи въ данномъ отношеніи.

Теорема 6. Если какая-нибудь точка C (черт. 54) дѣлитъ отрѣзокъ AB прямой линіи въ пространствѣ въ данномъ отношеніи $m : n$, то и проеціи (c и c') этой точки дѣлятъ соответственные проеціи (ab и $a'b'$) прямой въ томъ же отношеніи.

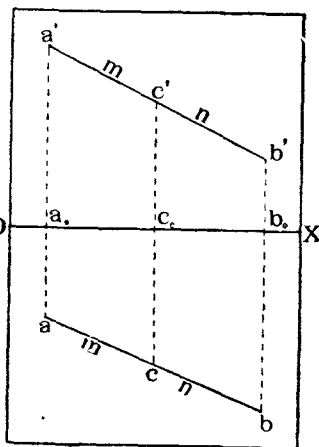
Доказательство. Проведемъ плоскости $ABab$ и $ABa'b'$, проектирующія отрѣзокъ AB съ лежащей на немъ точкой C на H и V , и найдемъ проеціи $ab, a'b', c$ и c' отрѣзка AB и точки C на H и V . Разсматривая плоскую фигуру $ABab$, видимъ, что линіи, проектирующія точки A, B и C на H , являются взаимно параллельными, а потому онѣ раздѣляютъ прямыя AB и ab на части пропорціональныя, т. е.

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

То же самое можно сказать относительно линий AB и $a'b'$, которыя



Черт. 54.



Черт. 55.

раздѣляется тремя взаимно параллельными проектирующими линиями Aa' , Cc' и Bb' на части пропорциональныя, т. е.

$$\frac{a'c'}{c'b'} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

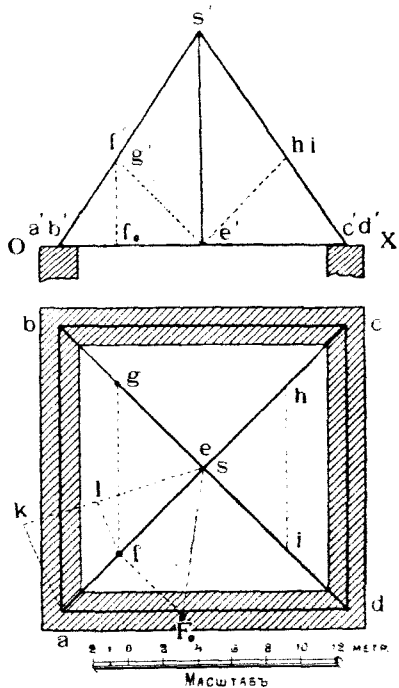
что и требовалось доказать.

На чертежѣ 55 показаны ортогональныя проекціи отръзка AB прямой, раздѣленной точкою C въ пространствѣ на части съ отношеніемъ $m : n$.

Задача № 5. На черт. 56 показана въ ортогональныхъ проекціяхъ схема деревянныхъ стропилъ кровли, перекрывающей зданіе, квадратное въ планѣ. Стропила состоятъ изъ четырехъ ногъ AS , BS , CS и DS , пересѣкающихся въ общемъ конькѣ S .

Концы ногъ попарно соединены между собою поясами AC и BD . Въ мѣстѣ E пересѣченія поясовъ послѣдніе соединены съ конькомъ S подвѣской SE .

Послѣ окончанія постройки оказалось необходимымъ подпереть прогибающіяся ноги подкосами, которые упирались бы однимъ своимъ концомъ въ уголь E , а другимъ—въ точки ногъ, дѣлящія длины ногъ въ отношеніи 2:3, считая короткія части ногъ отъ стѣнъ.



Черт. 56.

Показать на чертежѣ проекціи этихъ подкосовъ и опредѣлить длину пхъ осей.

Рѣшеніе. На основаніи теоремы 6-й дѣлимъ проекціи ногъ проекціями точекъ F , G , H и I въ отношеніи 2:3.

Для этого проведемъ, напримѣръ, изъ точки s случайную прямую sk и отложимъ на ней въ масштабѣ длины: $sl = 3$ метр. и $lk = 2$ метр. Соединимъ точки k и a и проведемъ прямую lf , параллельную ka , до пересѣченія съ sa въ точкѣ f , которая и будетъ искомой. Вертикальная проекція f' будетъ лежать на прямой $a's'$ въ точкѣ пересѣченія ея съ перпендикуляромъ, проведеннымъ къ OX изъ f . Остальныя точки G , H и I расположатся симметрично относительно точки S и линіи ss' . Проекціи подкосовъ изобразятся линіями: $e'f'$, ef ; $e'g'$, eg ; $e'h'$, eh ; $e'i'$, ei . Длины всѣхъ подкосовъ будутъ одинаковыми. Длина какого-нибудь подкоса, напримѣръ, EF опредѣлится на основаніи теоремы 4-й, какъ гипотенуза eF_0 прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ ef котораго служитъ горизонтальная проекція подкоса, а другимъ — отрѣзокъ fF_0 , равный разности $f'f$, разстояній концовъ f' и e' другой проекціи до оси OX .

§ 3. Двѣ прямыя линіи.

а) Различныя взаимныя положенія линій.

Двѣ прямыя линіи могутъ занимать слѣдующія характерныя положенія относительно другъ друга:

- 1) Онѣ могутъ быть взаимно параллельными,
- 2) » » взаимно пересѣкаться,
- 3) » » быть не параллельными и не пересѣкаться другъ съ другомъ. Такія линіи называются *скрещивающимися* въ пространствѣ или образующими *пространственный крестъ*.

Разсмотримъ, какъ отражается относительное положеніе прямыхъ въ пространствѣ на относительномъ положеніи ихъ ортогональныхъ проекцій.

1) Линіи, параллельныя другъ другу.

Пусть даны въ пространствѣ двѣ взаимно параллельныя линіи AB и CD (черт. 57).

Плоскости $ABab$ и $CDcd$, проектирующія эти линіи на H , будутъ, очевидно, взаимно параллельными, и пересѣкнутся съ H по линіямъ ab и cd , взаимно параллельнымъ.

Подобнымъ же образомъ плоскости $ABA'b'$ и $CDC'd'$, проектирующія линіи AB и CD на V , будутъ также взаимно параллельными и пересѣкнутся съ V по линіямъ $a'b'$ и $c'd'$, взаимно параллельнымъ.

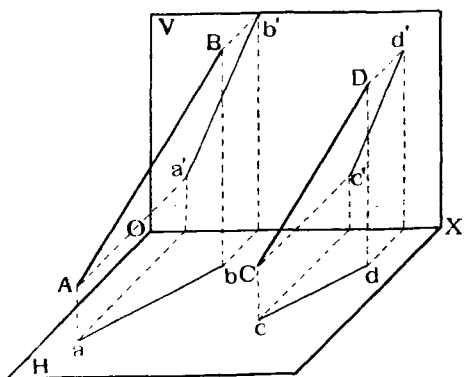
Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 7. Одноименныя проекціи линій, параллельныхъ другъ другу въ пространствѣ, между собою параллельны.

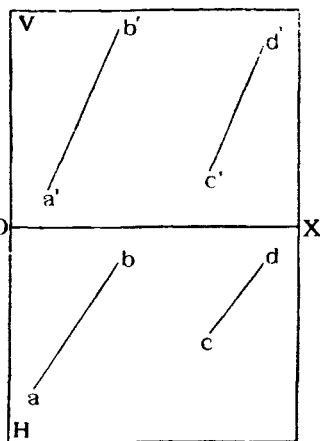
На черт. 58 показаны проекціи двухъ линій AB и CD , параллельныхъ другъ другу, $a'b' \parallel c'd'$ и $ab \parallel cd$.

Въ частномъ случаѣ, когда линіи въ пространствѣ являются профильными, ихъ одноименныя проекціи будутъ всегда параллельны другъ другу, хотя бы сами линіи и не были взаимно параллельными. Напримѣръ, на черт. 59 показаны двѣ профильныхъ линіи AB и CD , которыя не параллельны другъ другу, а между тѣмъ у нихъ $ab \parallel cd$ и $a'b' \parallel c'd'$. На томъ же чертежѣ показаны и двѣ взаимно параллельныхъ профильныхъ линіи CD и EF . Сравнивая расположеніе проекціи линій AB , CD и EF , нетрудно замѣтить, что у линій профильныхъ и параллельныхъ другъ другу:

- 1) одноименныя проекціи взаимно параллельны;



Черт. 57.



Черт. 58.

- 2) точки на разноименныхъ проекціяхъ одинаково расположены относительно оси, т. е., если c дальне отъ OX , чѣмъ d , и d' дальне отъ OX , чѣмъ c' , то и проекціи концовъ другой прямой также должны быть расположены, т. е. e дальне отъ оси, чѣмъ f , и f' , дальше отъ оси, чѣмъ e' ;

- 3) отношенія длинъ проекцій должны быть одинаковы, т. е. должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{cd}{c'd'} = \frac{ef}{e'f'}$$

каковое нетрудно вывести изъ подобія треугольниковъ CDD_1 и EFF_1 , имѣя въ виду равенство длинъ:

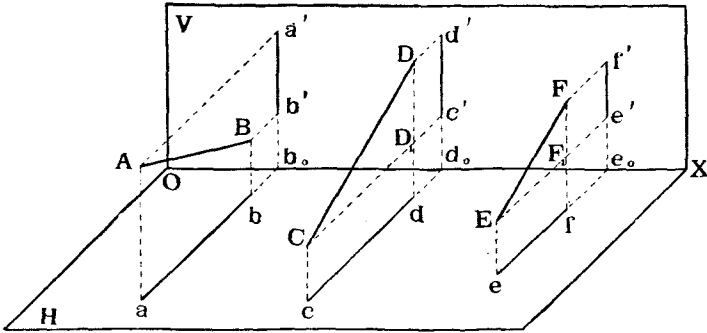
$$CD_1 = ed; DD_1 = d'c'; EF_1 = ef \text{ и } FF_1 = f'e'.$$

На чертежѣ 60 показаны проекціи трехъ профильныхъ прямыхъ, изъ которыхъ CD и EF взаимно параллельны, а AD имѣ не параллельна.

2). Линіи, пересѣкающіяся другъ съ другомъ.

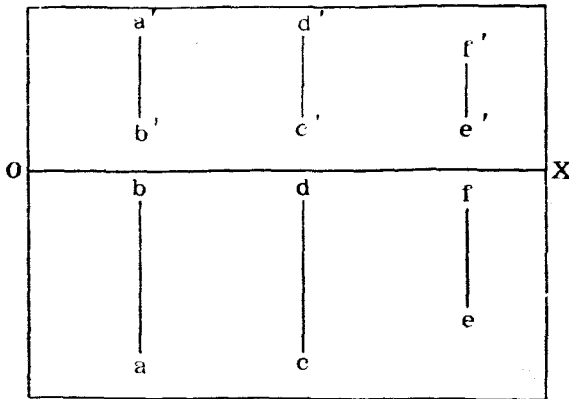
На черт. 61 представлены двѣ линіи AB и CD , пересѣкающіяся въ пространствѣ въ точкѣ E .

Такъ какъ точка E принадлежитъ обѣимъ линіямъ, то и проекціи ея должны лежать на проекціяхъ обѣихъ линій, т. е. горизонтальная про-



Черт. 59.

екція e должна лежать на пересѣченіи горизонтальныхъ проекцій ab и cd , а вертикальная e' —на пересѣченіи вертикальныхъ проекцій $a'b'$ и $c'd'$ (черт. 62).



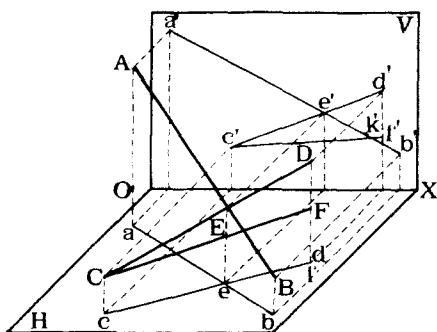
Черт. 60.

Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

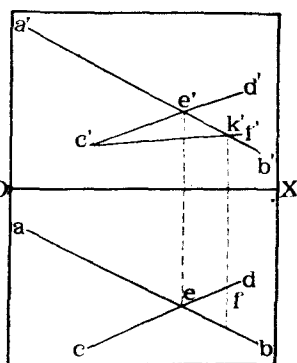
Теорема 8. Если прямыя линіи въ пространствѣ пересѣкаются, то и одноименныя проекціи ихъ пересѣкаются, при чемъ точки пересѣченія одноименныхъ проекцій располагаются на одномъ перпендикулярѣ къ ося OX .

Такимъ образомъ, для нахождения точки пересѣченія двухъ линій AB

и CD , заданныхъ ортогональными проекціями, слѣдуетъ (черт. 62) продолжить ихъ горизонтальныя проекціи до пересѣченія въ точкѣ e , и вертикальныя проекціи въ точкѣ e' . Точка $E (e, e')$ и будетъ точкой пересѣченія.



Черт. 61.



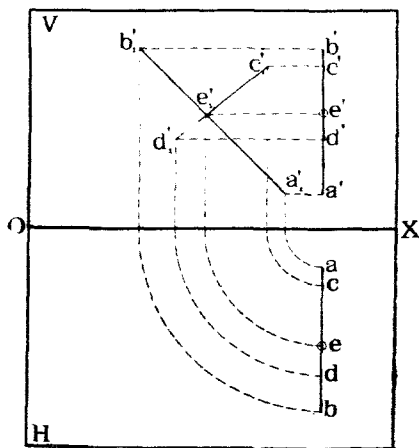
Черт. 62.

сѣченія прямыхъ, при чемъ e и e' должны располагаться на одномъ перпендикулярѣ къ OX .

Если даны двѣ профильныя линіи AB и CD (черт. 63), то найти точку ихъ встрѣчи описаннымъ приемомъ нельзя, и тогда можно воспользоваться методомъ проектированія прямыхъ на профильную плоскость и совмѣщенія послѣдней съ V , каковой методъ мы уже примѣняли для нахождения слѣдовъ профильной линіи (стр. 23, черт. 49—51).

На черт. 63 даны двѣ профильныя линіи AB и CD .

За новую вертикальную плоскость (W) проекцій принята плоскость этихъ линій. Эта плоскость совмѣщена съ плоскостью V также, какъ это было уже объяснено раньше (стр. 24). Линіи AB и CD изобразятся въ проекціи на W въ видѣ прямыхъ $a_1'b_1'$ и $c_1'd_1'$, пересѣкающихся въ точкѣ e_1' . Остается теперь повернуть обратно плоскость W и найти проекціи e' и e точки E при заданномъ положеніи прямыхъ.



Черт. 63.

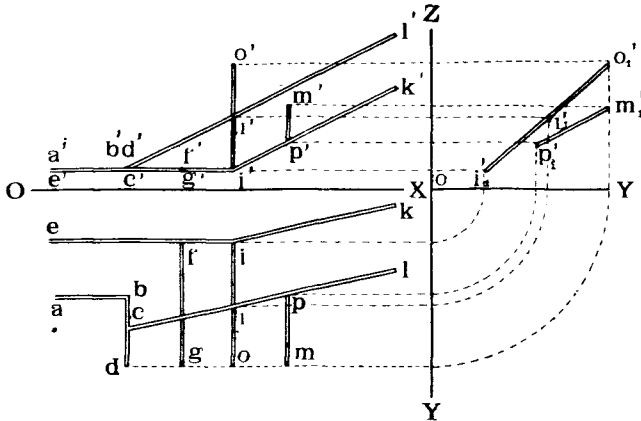
3). Линіи, не пересѣкающіяся между собою.

Если линіи въ пространствѣ при продолженіи своемъ не пересѣкаются, то для ихъ проекцій не будетъ имѣть мѣста теорема 8. На черт.

тежѣ 61 показаны двѣ такія не пересѣкающіяся линіи AB и CF , при чемъ CF имѣеть ту же самую горизонтальную проекцію, что и CD , но вертикальную проекцію, уже другую, $c'f'$, которая пересѣкаетъ $a'b'$ уже не въ точкѣ e' , а въ другой точкѣ, k' . При совмѣщеніи V съ H точки e и k' , очевидно, уже не будутъ лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX .

Задача № 6. На черт. 64 показано изображеніе въ ортогональныхъ проекціяхъ системы газопроводныхъ трубъ. Показать, какія трубы параллельны другъ другу и отмѣтить точки пересѣченія трубъ.

Рѣшеніе. На основаніи теоремы 7-й заключаемъ, что трубы $AB \parallel EI$ и $IK \parallel CL$, такъ какъ соответственныя одноименныя проекціи взаимно параллельны. Кроме того, трубы BD и FG также взаимно параллельны, такъ какъ онѣ перпендикулярны къ V .



Черт. 64.

Для того, чтобы опредѣлить, будутъ ли параллельны другъ другу трубы IO и PM , спроектируемъ ихъ на профильную плоскость W и совмѣстимъ ее съ V , вращая вокругъ оси OZ вправо. Проекціями этихъ линій на W будутъ прямыми $i_1'o_1'$ и $p_1'm_1'$, не параллельныя другъ другу; слѣдовательно и въ пространствѣ линіи IO и PM будутъ другъ другу не параллельны.

Въ этой же проекціи на W видимъ, что точка i_1' лежитъ на линіи $i_1'o_1'$, но въ то же время точка i въ пространствѣ лежитъ и на линіи CL . слѣдовательно, въ точкѣ i пересѣкаются трубы CL и IO .

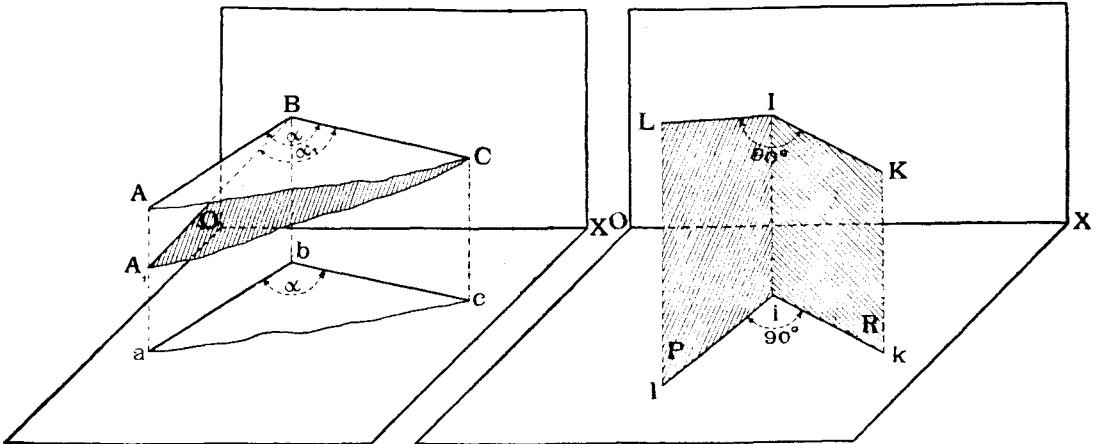
б) Проектированіе угла между двумя линіями.

Пусть данъ въ пространствѣ плоскій уголъ ABC (черт. 65). Предположимъ, что плоскость его параллельна плоскости проекцій, напри- мѣръ, H . Спроектируемъ обѣ линіи AB и BC на H . Нетрудно видѣть, что уголъ между проекціями ab и bc будетъ равенъ углу ABC , такъ какъ оба угла abc и ABC являются углами, образованными пересѣче-

ніемъ граней двуграннаго угла съ ребромъ Aa двумя, взаимно параллельными плоскостями, ABC и abc .

Если же плоскость проектируемаго угла будетъ не параллельна плоскости проекціи, то уголь въ общемъ случаѣ спроектируется на эту плоскость съ искаженіемъ.

Разсмотримъ проектированіе прямого угла (черт. 66). Пусть одна сторона IK прямого угла параллельна плоскости проекцій, напримѣръ, H , а другая сторона расположена случайно, занимая положеніе LI . Спро-



Черт. 65.

Черт. 66.

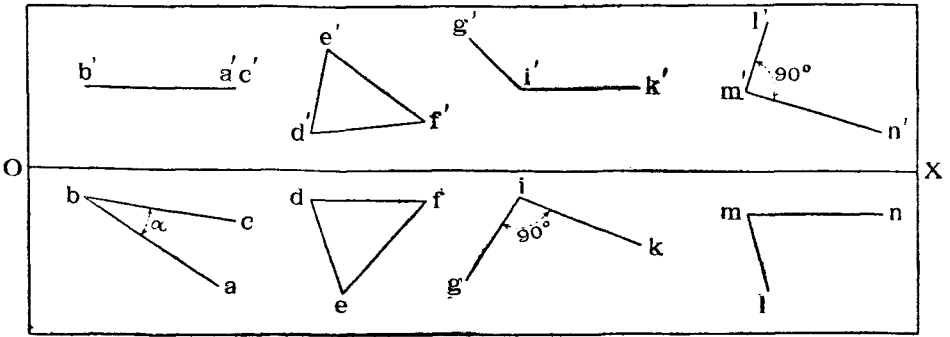
ектируемъ стороны угла на H двумя проектирующими плоскостями P и R . Линія IK , перпендикулярная къ LI и параллельная H , будетъ перпендикулярна къ линіи li , а, слѣдовательно, будетъ перпендикулярной и къ плоскости P . Проекція ik , параллельная IK , будетъ также перпендикулярна къ плоскости P , а, слѣдовательно, будетъ перпендикулярной и къ линіи li сѣченія плоскостей P съ H , служащей проекціей прямой LI . Такимъ образомъ, прямой уголь LIK , одна сторона котораго параллельна H , спроектировался на H безъ искаженія.

Предшествующія разсужденія позволяютъ высказать слѣдующую теорему.

Теорема 9. Уголь между двумя линіями проектируется безъ искаженія, если плоскость угла параллельна плоскости проекцій. Прямой же уголь проектируется безъ искаженія, если хотя бы одна его сторона параллельна плоскости проекцій.

На черт. 67 показаны ортогональныя проекціи: угла ABC , равнаго α и проектирующагося на H безъ искаженія, треугольника DEF , углы котораго проектируются на V и H съ искаженіемъ, прямого угла GIK , проектирующагося на H безъ искаженія, такъ какъ сторона его IK па-

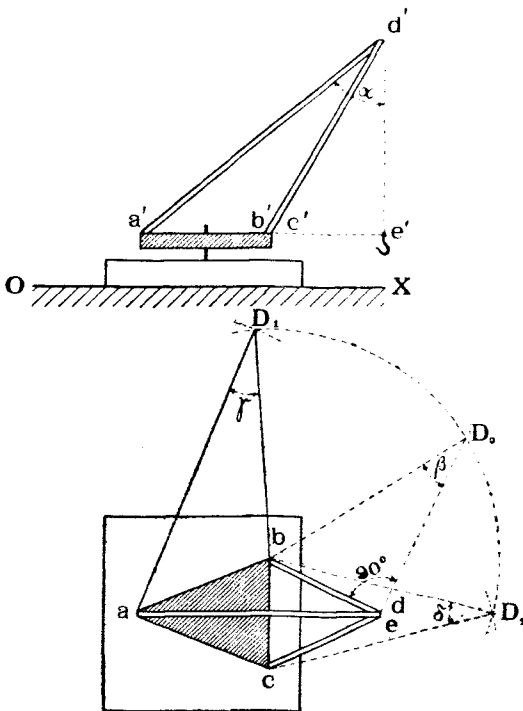
раллельна H , и прямого угла LMN , проектирующагося на V безъ искаженія, такъ какъ сторона его MN параллельна V .



Черт. 67.

Замѣтимъ, что уголъ между линиями скрещивающимися, т. е. не параллельными и не пересѣкающимися, называется уголъ между двумя прямыми, параллельными даннымъ и пересѣкающимися другъ съ другомъ.

Задача № 7. На черт. 68 изображенъ поворотный подъемный кранъ со стрѣлами AD , BD и CD , укрѣпленными на вращающейся платформѣ ABC (на чертежѣ заштрихована). Черезъ блокъ, находящійся въ углу D , перекинута цѣпь DE . Опредѣлить углы между цѣпью и каждой стрѣлой крана, а также углы между стрѣлами.



Черт. 68.

Рѣшеніе. Уголъ между цѣпью и стрѣлой AD , оси которыхъ параллельны V , проектируется, согласно теоремѣ 9-й, на V безъ искаженія и равенъ углу α между $a'd'$ и $d'e'$.

Уголъ между цѣпью и стрѣлой BD легко опредѣлить изъ прямоугольнаго треугольника BDE , у котораго катетъ BE проектируется на H безъ искаженія и равенъ линіи be , а катетъ DE проектируется на V безъ искаженія и равенъ линіи $d'e'$. По этимъ двумъ катетамъ строимъ на H прямоугольный треугольникъ bdD_0 , у котораго $dD_0 = d'e'$. Гипотенуза bd_0 этого треугольника равна истинной линіи стрѣлы BD , а уголъ β при

вершинѣ D_0 равенъ углу между цѣпью и стрѣлой BD и равенъ по симметріи углу между цѣпью и стрѣлой CD .

Зная длины всѣхъ стрѣлъ AD и $BD = CD = bD_0$, и зная, что стороны ab , bc и ac треугольника ABC проектируются на H безъ искаженія, такъ какъ платформа ABC параллельна H , нетрудно по тремъ сторонамъ построить петлиныя фигуры треугольниковъ ABD и BCD . На черт. 68 треугольникъ aD_1b равенъ Δ -ку ABD , при чемъ $aD_1 = a'd'$; $bD_1 = bD_0$.

Δ -къ bcD_2 равенъ Δ -ку BCD , при чемъ $bD_2 = cD_2 = bD_0$. Уголъ $aD_1b = \gamma$ равенъ углу между стрѣлою AD и стрѣлами BD и CD , а уголъ $bD_2c = \delta$ углу между стрѣлами BD и CD .

§ 4. Плоскость.

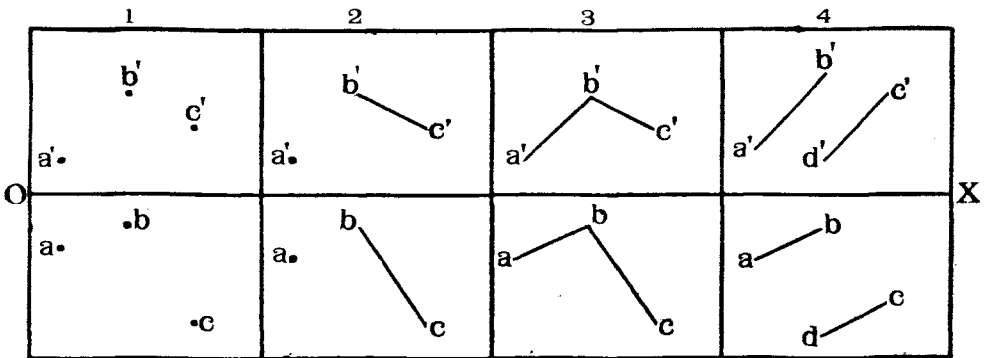
а) Заданіе плоскости.

Въ пространствѣ плоскость можетъ быть опредѣлена слѣдующими четырьмя способами:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) прямою линіею и точкою внѣ ея;
- 3) двумя пересѣкающимися линіями;
- 4) двумя параллельными линіями.

Очевидно, отъ каждаго изъ этихъ способовъ легко перейти къ другому.

На черт. 69 показаны въ ортогональныхъ проекціяхъ заданія плоскости каждымъ изъ упомянутыхъ способовъ.



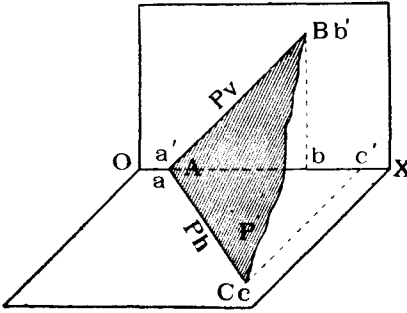
Черт. 69.

Всякая плоскость при продолженіи въ общемъ случаѣ пересѣчетъ плоскости проекцій V и H , и линія пересѣченія съ V и H , называемая *следами* плоскости на плоскостяхъ проекцій, являются очень удобными для заданія плоскости, такъ какъ по расположенію этихъ линій легко судить о положеніи самой плоскости относительно плоскостей проекцій.

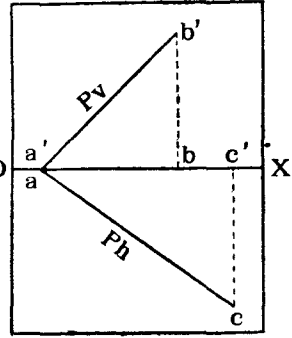
На черт. 70 изображена въ пространствѣ случайная плоскость P , пересѣкающая V и H .

Линія AN сѣченія P съ V называется *вертикальнымъ следомъ* пло-

скости P и обозначается двумя буквами Pv , изъ которыхъ первая, большая буква, обозначаетъ плоскость P , а вторая, малая, плоскость V . Очевидно, слѣдъ Pv или AB совпадаетъ со своей вертикальной проекціей ($a'b'$), горизонтальная же его проекція совпадетъ съ осью.

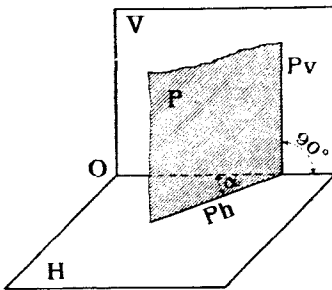


Черт. 70.

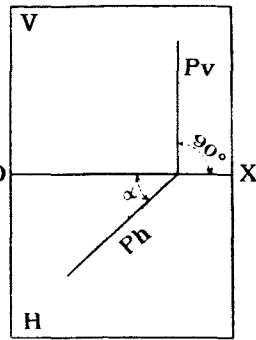


Черт. 71.

Линія AC сѣченія P съ H называется *горизонтальнымъ слѣдомъ* плоскости P и обозначается двумя буквами Ph . Слѣдъ этотъ совпадаетъ со своей горизонтальной проекціей ac , вертикальная же его проекція $a'c'$ совпадетъ съ осью.



Черт. 72.



Черт. 73.

На чертежѣ 71 показано въ ортогональныхъ проекціяхъ задание случайно расположенной плоскости P слѣдами. Буквъ a, a', b, b' и c, c' можно и не ставить.

Замѣтимъ, что три плоскости P, V и H пересѣкаются въ одной точкѣ A , въ которой пересѣкаются и слѣды Pv и Ph плоскости. Точка эта лежитъ на оси OX и называется *точкою схода слѣдовъ*.

б) *Различныя положенія плоскости относительно плоскостей проекцій.*

Плоскость, которую пока будемъ обозначать буквой P , можетъ за-

нимать въ пространствѣ различныя положенія относительно плоскостей проекцій. Разсмотримъ, какимъ образомъ расположеніе плоскости P относительно H въ V отзывается на расположеніе слѣдовъ Pv и Ph относительно другъ друга и оси OX .

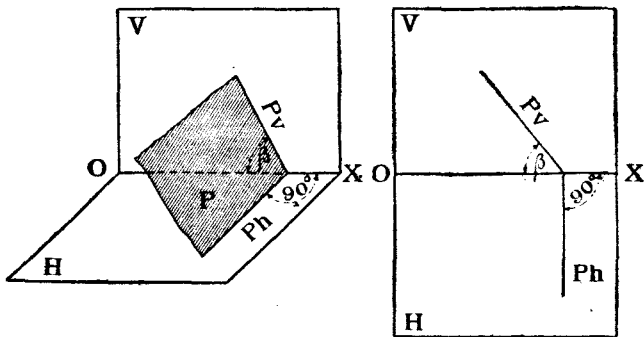
1) Плоскость P пересѣкаетъ ось OX и расположена случайно (чертежи 70 и 71).

Въ этомъ случаѣ слѣды Pv и Ph занимаютъ случайное положеніе, но должны пересѣкаться въ точкѣ схода, лежащей на оси OX .

2) Плоскость P перпендикулярна къ H (черт. 72 и 73).

Въ этомъ случаѣ вертикальный слѣдъ Pv , какъ линия сѣченія двухъ плоскостей P и V , перпендикулярныхъ съ третьей H , будетъ перпендикуляренъ къ оси OX . Слѣдъ Ph будетъ занимать случайное положеніе. Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ уголъ наклона P къ V будетъ проектироваться на H безъ искаженія и будетъ измѣряться угломъ α между Ph и OX .

3) Плоскость P перпендикулярна къ V (черт. 74 и 75).



Черт. 74.

Черт. 75.

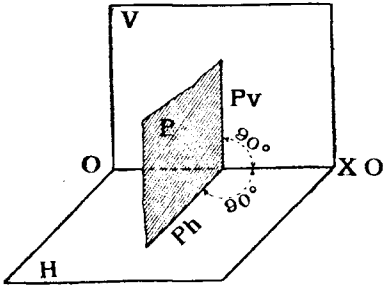
Этотъ случай аналогиченъ предыдущему. Горизонтальный слѣдъ Ph будетъ перпендикуляренъ къ оси, а вертикальный займетъ случайное положеніе.

Уголъ наклона P къ H спроектируется безъ искаженія на V и будетъ равенъ углу β между Pv и OX .

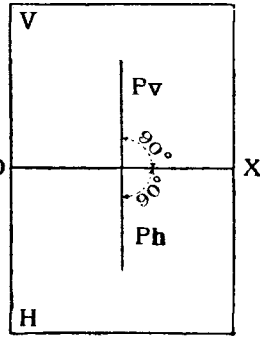
4) Плоскость P перпендикулярна и къ V и къ H , т. е. является профильной (черт. 76 и 77). Въ этомъ случаѣ оба слѣда будутъ перпендикулярны къ OX и будутъ проходить черезъ общую точку схода. При совмѣщеніи V съ H оба слѣда сольются въ одну прямую линію, перпендикулярную къ OX .

5) Плоскость P параллельна плоскости H (черт. 78 и 79). Очевидно, въ этомъ случаѣ слѣдъ Ph будетъ располагаться въ безконечяо большомъ разстояніи отъ OX , а слѣдъ Pv будетъ параллеленъ OX .

Кромѣ того, разстояніе Pv до OX будетъ равно разстоянію плоскости P отъ H .

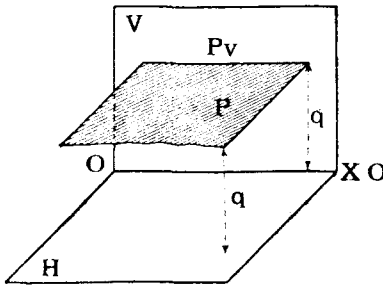


Черт. 76.

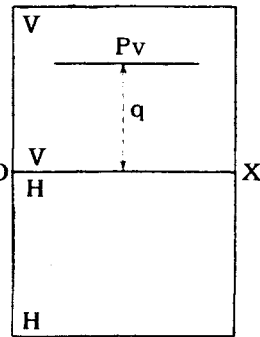


Черт. 77.

6. Плоскость P параллельна V (черт. 80 и 81). Въ этомъ случаѣ

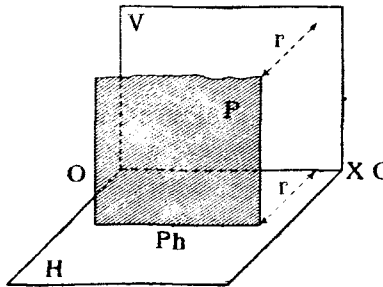


Черт. 78.

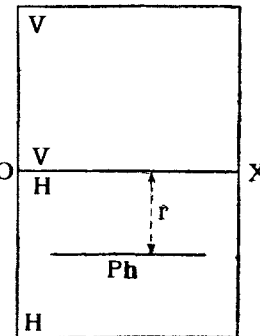


Черт. 79.

слѣдъ Pn будетъ параллеленъ оси OX , а Pv расположится въ безко-



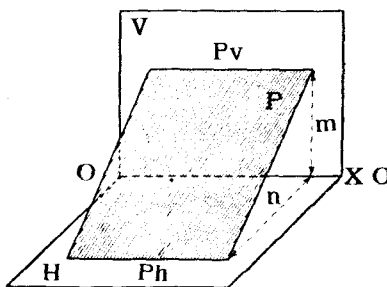
Черт. 80.



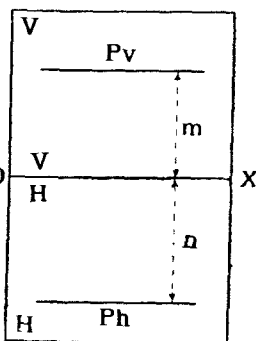
Черт. 81.

нечности. Разстояніе Ph до OX будетъ равно разстоянію P до V .

7. Плоскость P параллельна оси OX (черт. 82 и 83). Въ этомъ случаѣ слѣды Pv и Ph будутъ параллельны оси OX и въ общемъ случаѣ расположатся отъ нея въ неравныхъ разстояніяхъ m и n . Если же



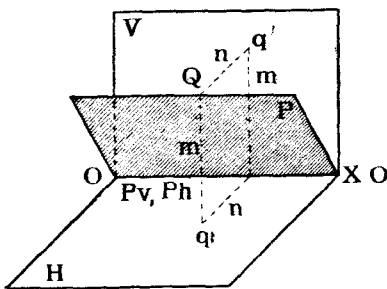
Черт. 82.



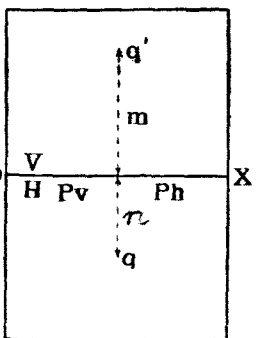
Черт. 83.

эти разстоянія будутъ равны, то это покажетъ, что плоскость P наклонена къ V и H подъ одинаковыми углами, равными 45° .

8. Плоскость P проходитъ черезъ ось OX (черт. 84 и 85). Въ этомъ случаѣ оба слѣда Pv и Ph сливаются другъ съ другомъ и съ осью OX , и заданіе плоскости только слѣдами является неопредѣленнымъ, такъ какъ



Черт. 84.



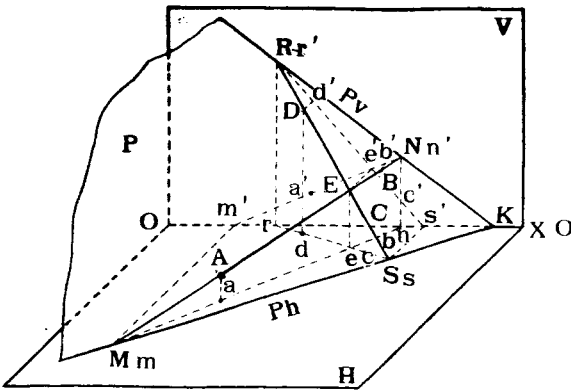
Черт. 85.

можно провести безчисленное множество плоскостей, которыя проходили бы черезъ ось OX . Для опредѣленности задания слѣдуетъ обозначить какую-нибудь точку Q плоскости P , не лежащую на оси OX . Если разстоянія m и n точки Q до плоскостей проекцій будутъ одинаковыми, то плоскость P совпадетъ съ биссекторной плоскостью двуграннаго угла между плоскостями V и H , и тогда всякая точка такой плоскости будетъ находиться на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ V и H .

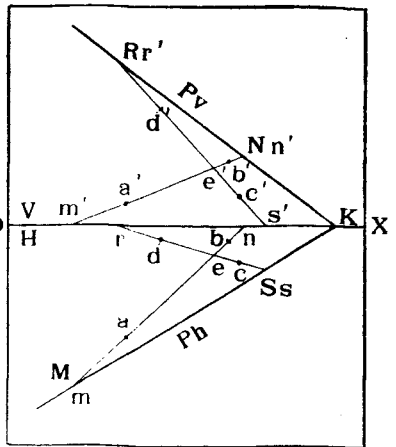
с) Построеніе слѣдовъ плоскости.

Имѣя въ виду легкость опредѣленія положенія плоскости P относительно V и H по ея слѣдамъ, выгодно бываетъ перейти отъ заданія плоскости по одному изъ вышеупомянутыхъ способовъ (черт. 69) къ заданію ея слѣдами.

Такъ какъ отъ любого изъ четырехъ случаевъ заданія плоскости (чертежъ 69) легко перейти къ другому, то мы въ дальнѣйшемъ покажемъ лишь, какъ строятся слѣды плоскости, заданной двумя пересѣкающимися линіями.



Черт. 86.



Черт. 87.

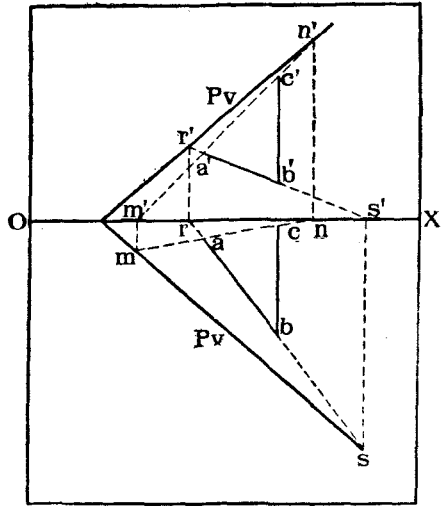
Пусть (черт. 86 и 87) дана плоскость двумя линіями AB и CD , пересѣкающимися въ точкѣ E . Если мы продолжимъ эти линіи до пересѣченія съ плоскостями проекціи и найдемъ слѣды ихъ, то, очевидно, эти послѣдніе должны принадлежать и слѣдамъ плоскости, опредѣляемой прямыми. Поэтому, задача на построеніе слѣдовъ плоскости сводится къ задачѣ на нахожденіе слѣдовъ линій, опредѣляющихъ плоскость.

На черт. 86 и 87 построены вертикальные слѣды N и R и горизонтальные слѣды M и S . Линія NR будетъ являться вертикальнымъ слѣдомъ плоскости, а линія MS — горизонтальнымъ слѣдомъ. Если построенія на черт. 87 выполнены точно, то оба слѣда должны сходиться въ общей точкѣ K схода слѣдовъ, лежащей на оси OX .

Слѣды же прямыхъ линій строятся такъ, какъ указано въ теоремѣ 5-й (стр. 22). Въ случаѣ, если одна изъ прямыхъ линій, опредѣляющихъ плоскость, является профильной линіей, слѣды которой прямо по теоремѣ 5-й

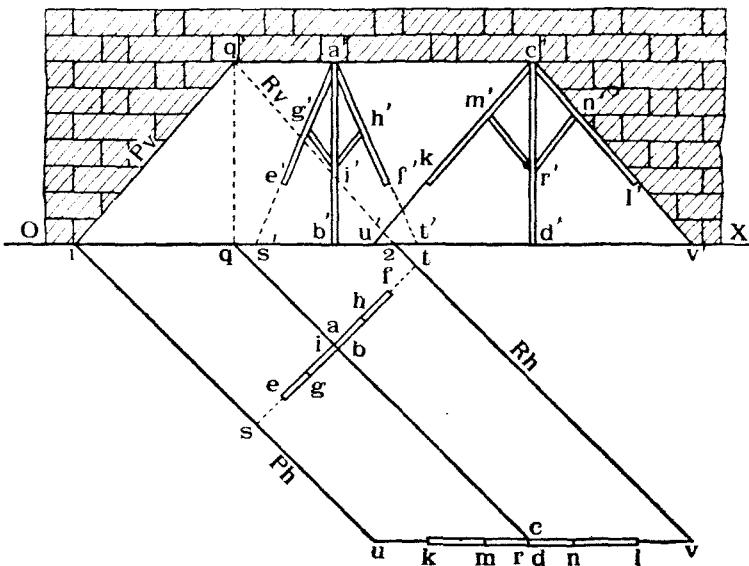
построить нельзя, то для построения слѣдовъ плоскости можно применить слѣдующій приемъ:

Пусть (черт. 88) плоскость задана двумя линиями AB и BC , изъ которыхъ BC профильная. Выберемъ на этой линіи какую-нибудь точку C такъ, чтобы линія AC имѣла слѣды въ предѣлахъ чертежа, и строимъ слѣды M, N, R и S линій AC и AB , лежащихъ въ той же заданной плоскости. Линіи RN и MS и будутъ искомыми слѣдами плоскости.



Черт. 88.

Задача № 8. На черт. 89 въ ортогональныхъ проекціяхъ изображены: 1) каменная стѣна, фасадъ которой совпадаетъ съ V , 2) стропила крыши кирпичнаго сарая, состоящая изъ стоекъ AB и CD , ногъ AE, AF, CK и CL и подкосовъ GI, HI, MR и NR . Плоскость H совпадаетъ съ поверхностью земли. Требуется построить линіи сѣченія (слѣды) крыши сарая съ землей и со стѣной, предполагая, что положеніе крыши опредѣлено ногами стропиль.



Черт. 89.

Рѣшеніе. Находимъ горизонтальные слѣды S, T, U и V линій AE, AF, CK и CL . Соединяя попарно точки S съ U и T съ V , получимъ горизонтальные слѣды Ph и Rh или линіи сѣченія крыши съ землей.

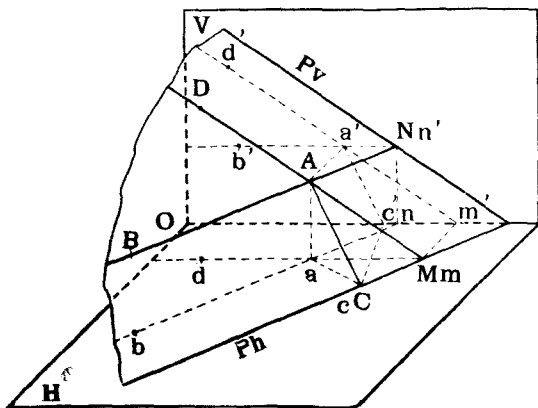
Замѣтимъ точки 1 и 2 пересѣченія этихъ слѣдовъ съ осью OX .

Далѣе находимъ вертикальный слѣдъ Q , конька крыши AC . Черезъ точку Q должны пройти вертикальные слѣды или линіи сѣченія крыши съ плоскостью стѣны. Соединяя точки 1 и 2 съ точкою Q , и получимъ эти слѣды Pv и Ph .

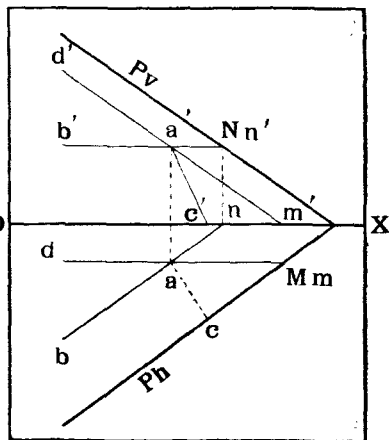
d) *Горизонталѣ и фронталѣ плоскости.*

Среди линій различныхъ направленій, которыя могутъ лежать въ любой плоскости, отмѣтимъ два рода линій, имѣющихъ широкое примѣненіе въ техникѣ.

Однѣ изъ линій, напримѣръ, AB на черт. 90 и 91, располагаясь въ данной плоскости, могутъ быть въ то же время горизонтальными, т. е.



Черт. 90.



Черт. 91.

параллельными плоскости H и слѣду Ph . Такія линіи называются *горизонтальными плоскости P* . Другія линіи, напримѣръ, AD , располагаясь въ данной плоскости, могутъ быть въ то же время параллельными V и слѣду Pv . Такія линіи называются *фронтальными плоскости P* . Такъ какъ горизонталь AB параллельна Ph , то ab будетъ параллельна Ph , а $a'b'$ параллельна OX (по теоремѣ 7-й, стр. 28). Подобнымъ же образомъ для фронталѣ AD будемъ имѣть, что $a'd'$ будетъ параллельно Pv , а ad параллельно OX .

Изъ свойствъ горизонталей и фронталей вытекаетъ слѣдующій приемъ проведенія такихъ линій въ проекціяхъ. Пусть, напримѣръ, дана плоскость P слѣдами Pv и Ph (черт. 91) и дана вертикальная проекція a' точки A при условіи, что A лежитъ въ P . Требуется провести черезъ точку A горизонталь и фронталь плоскости P .

Проводимъ черезъ a' линію $a'b'$, параллельную OX . Эта линія будетъ

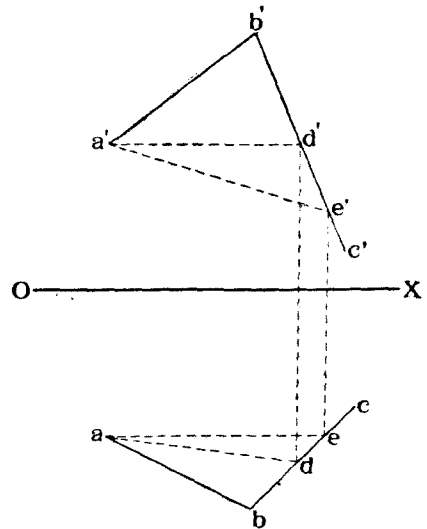
вертикальной проекціей искомой горизонтали. Продолжаемъ $a'b'$ до пересѣченія съ Pv въ точкѣ n' , которая будетъ служить вертикальнымъ слѣдомъ N линіи AB . Горизонтальная проекція n этого слѣда расположится на оси OX . Проводимъ черезъ n параллельно Ph линію nb , которая будетъ горизонтальной проекціей горизонтали AB . Горизонтальная проекція a точки A будетъ лежать на линіи nb въ мѣстѣ пересѣченія ея съ перпендикуляромъ къ OX , проведеннымъ изъ a' .

Для построенія фронтали AD проводимъ черезъ a' линію $a'd'$, параллельную Pv , до пересѣченія съ OX въ точкѣ m' , которая будетъ вертикальной проекціей горизонтального слѣда фронтали. Самый же слѣдъ M будетъ лежать на слѣдѣ Ph въ точкѣ пересѣченія его съ перпендикуляромъ къ OX , возстановленнымъ изъ точки m . Проведя изъ M линію Md , параллельную OX , получимъ горизонтальную проекцію фронтали. На линіи Md найдемъ и точку a , горизонтальную проекцію точки A .

Замѣтимъ, что въ геологіи, гдѣ часто говорится о наклонныхъ пластахъ какой-нибудь породы, а также и въ геодезіи, при изученіи неровностей поверхности земли, горизонталь какого-нибудь слоя земли называется *простираніемъ* этого слоя, а уголъ между нею и меридіаномъ мѣста называется *угломъ простиранія*. Линія же AC , лежащая въ плоскости (черт. 90 и 91) и перпендикулярная къ горизонтали, а, слѣдовательно, и къ слѣду Ph , называется *падениемъ* плоскости или *линіей наибольшаго ската* плоскости. Уголъ между нею и ея горизонтальной проекціей измѣряетъ наклонъ плоскости P къ горизонтальной плоскости и называется *угломъ паденія* плоскости P или *угломъ ея наибольшаго ската*. Такъ какъ уголъ между AC и Ph —прямой, и одна сторона его Ph лежитъ въ плоскости H , то на основаніи теоремы 9-й онъ спроектуруется на H безъ искаженія, т. е. ac будетъ перпендикулярна Ph .

Посмотримъ теперь, какъ строятся горизонтали и фронталы плоскости въ случаѣ, если послѣдняя задана не слѣдами, а двумя пересѣкающимися линіями.

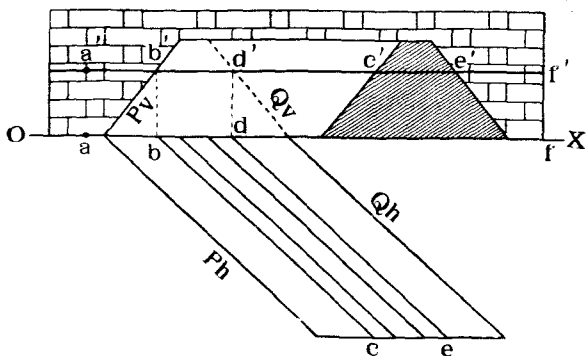
На черт. 92 задана въ ортогональныхъ проекціяхъ плоскость двумя пересѣкающимися линіями AB и BC .



Черт. 92.

Проведемъ въ плоскость горизонталь, проходящую черезъ точку A . Для этого черезъ a' проведемъ линію, параллельную оси OX , до пересѣченія съ $b'c'$ въ точкѣ d' и спроектируемъ d' на bc въ точку d . Линіи $a'd'$ и ad и будутъ проекціями искомой горизонтали. Если бы мы построили горизонтальный слѣдъ плоскости ABC , то онъ былъ бы параллеленъ ad . Для построенія фронтали плоскости ABC проведемъ черезъ a линію, параллельную оси OX , до пересѣченія съ bc въ точкѣ e и спроектируемъ e на $b'e'$ въ точку e' . Линіи ae и $a'e'$ и будутъ проекціями искомой фронтали. Если бы мы построили вертикальный слѣдъ плоскости ABC , то онъ оказался бы параллельнымъ линіи $a'e'$,

Задача № 9. На черт. 93 изображена въ ортогональныхъ проекціяхъ каменная набережная, фасадъ которой совпадаетъ съ плоскостью V . Къ набережной примыкаетъ земляная дамба трапецевиднаго сѣченія. За плоскость H принято дно рѣки. Замѣчено, что во время наводненія вода поднимается до точки A , отмѣченной на набережной. Показать линіи урѣза воды на набережной и дамбѣ на уровнѣ точки A .



Черт. 93.

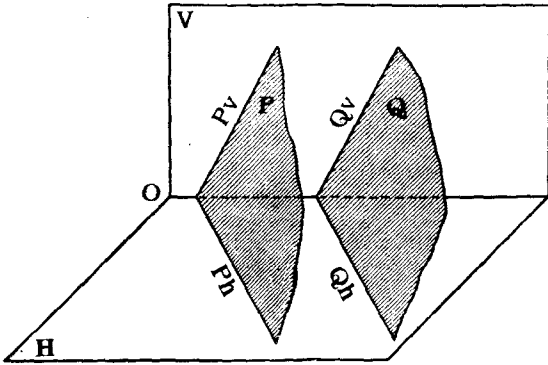
Рѣшеніе. Задача сводится къ проведенію горизонталей въ плоскостяхъ: стѣны набережной и откосовъ дамбы на высотѣ $a'a$. Вертикальной проекціей этихъ горизонталей будетъ служить линія $a'a'$, параллельная OX . Линія эта встрѣчаетъ слѣды Pv и Qv плоскостей откосовъ дамбы въ точкахъ b' и d' , которыя являются вертикальными слѣдами искомыхъ горизонталей этихъ плоскостей. Горизонтальные проекціи b и d будутъ лежать на оси OX ; проекціи bc и de горизонталей откосовъ пойдутъ параллельно слѣдамъ Ph и Qh и встрѣтятъ торецъ дамбы въ точкахъ c и e . Линія ce будетъ урѣзомъ воды на торцѣ дамбы. Линіи же ab и df будутъ урѣзомъ воды на набережной.

§ 5. Двѣ плоскости.

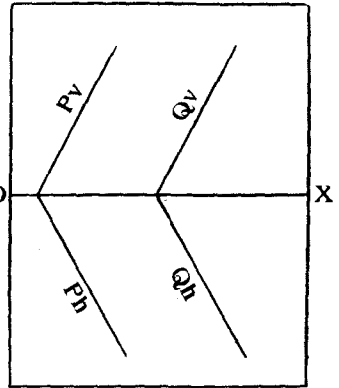
а) Относительное положеніе двухъ плоскостей.

Двѣ плоскости въ пространствѣ могутъ быть или взаимно параллельными, въ частномъ случаѣ сливаясь другъ съ другомъ, или могутъ пересѣкаться другъ съ другомъ.

На чертежѣ 94 изображены въ пространствѣ двѣ взаимно параллельныя плоскости P и Q . Онѣ, очевидно, пересѣкаются плоскостями V и H по линиямъ, соответственно параллельнымъ другъ другу, т. е. $Pv \parallel Qv$ и $Ph \parallel Qh$. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема.



Черт. 94.



Черт. 95.

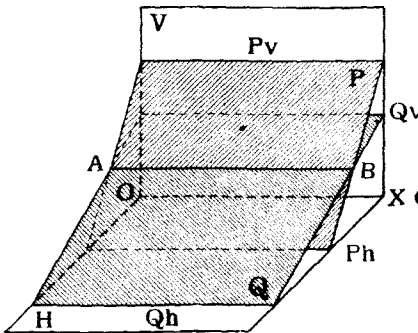
Теорема 10. Если плоскости параллельны другъ другу, то и одноименные слѣды ихъ взаимно параллельны.

На черт. 95 показаны въ ортогональныхъ проекціяхъ двѣ взаимно-параллельныя плоскости P и Q .

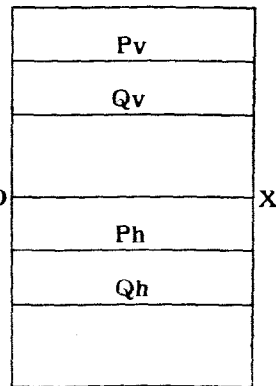
Обратная теорема также имѣетъ мѣсто.

Теорема 11. Если одноименные слѣды двухъ плоскостей параллельны другъ другу, то въ общемъ случаѣ плоскости взаимно параллельны.

Въ частномъ случаѣ, если плоскости параллельны оси OX (черт. 96),



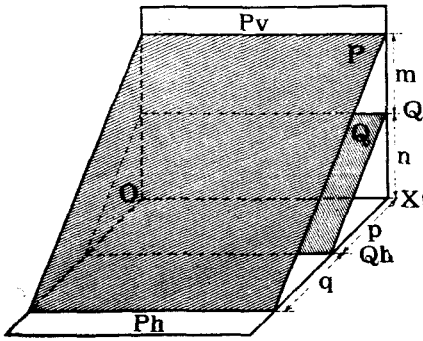
Черт. 96.



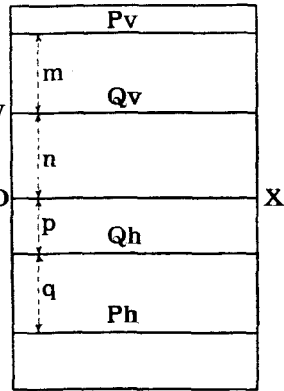
Черт. 97.

то онѣ могутъ пересѣкаться по линіи AB , параллельной OX , имѣя въ то же время слѣды параллельными другъ другу (черт. 96 и 97).

Въ этомъ случаѣ для того, чтобы по параллельности другъ другу слѣдовъ судить о параллельности плоскостей, необходимо теорему 11-ю пополнить условіемъ, чтобы отношеніе разстояній вертикальныхъ слѣдовъ до оси равнялось отношенію разстояній соответственныхъ горизонтальныхъ слѣдовъ до оси, что явствуетъ изъ чертежей 98 и 99, гдѣ изобра-



Черт. 98.

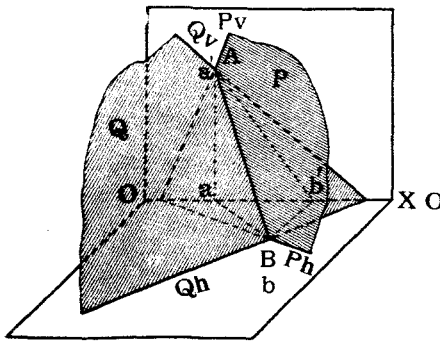


Черт. 99.

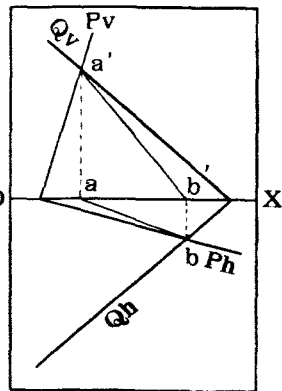
жены двѣ плоскости, параллельныя другъ другу и оси OX . Въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p}.$$

Кромѣ того, необходимо, чтобы слѣды эти были одинаково расположены относительно OX , т. е., если Pv дальше отъ OX , чѣмъ Qv , то и Ph должно быть дальше отъ OX , чѣмъ Qh .



Черт. 100.



Черт. 101.

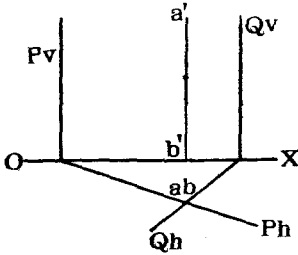
Наконецъ, если плоскости въ пространствѣ пересѣкаются, то и одноименные слѣды ихъ въ общемъ случаѣ пересѣкаются (черт. 100 и 101).

Въ частномъ же случаѣ, когда плоскости хотя и пересѣкаются, но въ то же время параллельны оси OX (черт. 96 и 98), слѣды ихъ могутъ быть и взаимно параллельными.

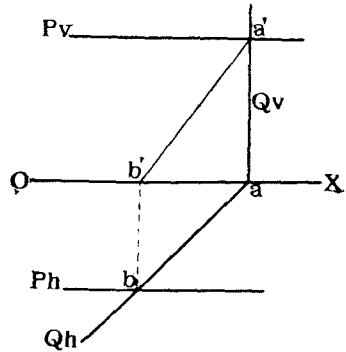
б) *Построеніе линіи сѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ слѣдами.*

Теорема 12. Линія пересѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ слѣдами, проходитъ черезъ точки пересѣченія одноименныхъ слѣдовъ плоскостей.

Дѣйствительно, линія AB сѣченія двухъ плоскостей P и Q (черт. 100 и 101) вполне опредѣляется, если извѣстны двѣ точки A и B пересѣченія одноименныхъ слѣдовъ плоскости. Поэтому (черт. 101) для построенія этой линіи достаточно продолжить Pv и Qv до пересѣченія другъ съ другомъ въ точкѣ $A (a, a')$ и Ph и Qh до пересѣченія другъ съ другомъ въ точкѣ $B (b, b')$. Линія $AB (ab, a'b')$ и будетъ искомой.



Черт. 102.



Черт. 103.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ пересѣченія плоскостей другъ съ другомъ.

1. Плоскости P и Q перпендикулярны къ H (черт. 102). Въ этомъ случаѣ и линія AB сѣченія ихъ будетъ также перпендикулярна къ H и спроектируется на H въ видѣ точки (a, b) , находящейся въ мѣстѣ пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ Ph и Qh . Вертикальная же проекція $a'b'$ будетъ перпендикулярна къ OX .

2. Плоскость P параллельна OX , а Q перпендикулярна къ H (черт. 103).

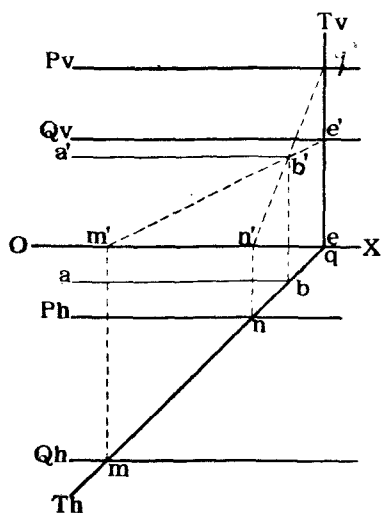
Линія AB строится по общему правилу, т. е. замѣчаемъ точку A пересѣченія Pv съ Qv и точку B пересѣченія Ph съ Qh и соединяемъ эти точки другъ съ другомъ.

3. Плоскости P и Q параллельны оси OX (черт. 104).

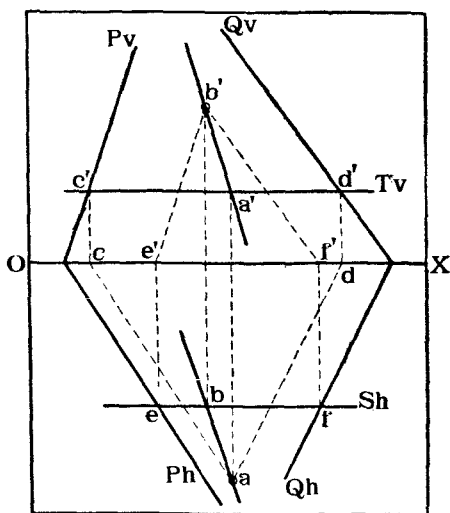
Въ этомъ случаѣ искомая линія сѣченія будетъ параллельна OX и для построенія ея достаточно найти одну ея точку.

Проведемъ случайную плоскость T , на примѣръ, перпендикулярную къ H , и найдемъ, какъ это было показано только что выше (случай 2)

линіи ME и NQ сѣченія T съ Q и P . Точка B пересѣченія ліній ME и NQ , принадлежа одновременно плоскостямъ P и Q , будетъ находиться на искомой лінії сѣченія. Провождая черезъ b' и b лінії $a'b'$ и ab , параллельныя оси OX , и получимъ проекціи ліній AB .



Черт. 104.



Черт. 105.

4. Плоскости P и Q заданы случайно, но такъ, что одноименные слѣды ихъ не пересѣкаются въ предѣлахъ чертежа (черт. 105).

Для нахождения лінії сѣченія плоскостей P и Q воспользуемся приемомъ, примененнымъ въ случаѣ 3-мъ, т. е. будемъ находить лінію сѣченія обѣихъ плоскостей съ нѣкоторою новою, вспомогательною, которую выберемъ такъ, чтобы лінія сѣченія ея съ P и съ Q было бы нетрудно построить. Проведемъ, напримѣръ, плоскость S параллельно V . Плоскости S и P пересѣкутся по лінії EB , параллельной Pv . Горизонтальная проекція Sb сольется со слѣдомъ Sh , а вертикальная $e'b'$ будетъ параллельна Pv . Лінія FB сѣченія плоскостей S и Q будетъ параллельна Qv , при чемъ fb сольется съ Sh , а $f'b'$ будетъ параллельна Qv . Точка B (b, b') пересѣченія ліній EB и FB будетъ принадлежать искомой лінії сѣченія плоскостей P и Q .

Проведа вторую вспомогательную плоскость, напримѣръ, T , параллельную H и найдя лінію сѣченія CA и DA ея съ P и Q , получимъ въ точкѣ A пересѣченія этихъ ліній вторую точку A , которая вмѣстѣ съ точкой B и опредѣлитъ искомую лінію.

Задача № 10. На черт. 106 изображены двускатныя крыши двухъ галлерей, упирающихся въ стѣну дома, фасадъ которой принять за плоскость V и заштригованъ на чертежѣ. Лініи карнизовъ крышъ лежатъ въ одной горизонтальной плоскости, принятой за плоскость H .

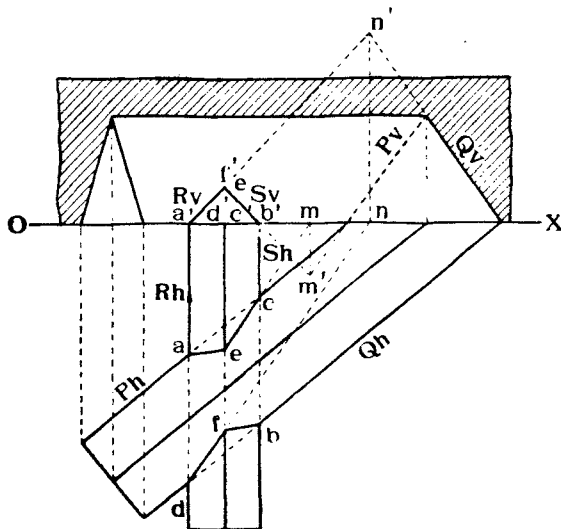
Построить линии сечения крышъ.

Рѣшеніе.

Такъ какъ на чертежѣ даны слѣды граней крышъ на V и H , то задача сводится къ построению линий сечения плоскостей, заданныхъ слѣдами.

Грани крыши большой галлерей обозначены буквами P и Q , а слѣды ихъ— Pv , Ph , Qv и Qh . Грани крыши малой галлерей обозначены буквами R и S , а слѣды ихъ— Rv , Rh , Sv и Sh .

На чертежѣ отмѣчаютъ точки A , B , C и D пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ Ph , Qh , Rh и Sh между собою. Черезъ эти точки будутъ проходить искомыя линии сечения. Далѣе, пойдемъ, напримѣръ, линію сечения граней R и Q .



Черт. 106.

Продолжаемъ слѣды Rv и Qv до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ N ($n'n$) и соединяемъ точку N съ ранѣе найденной точкой D , принадлежащей линіи сечения тѣхъ же плоскостей. Линія DN и будетъ линіей сечения граней R и Q . Намъ нужна лишь часть DF этой линіи между карнизомъ и конькомъ крыши малой галлерей. Соединяя точку F съ B , получимъ линію FB сечения грани S съ Q .

Найдемъ теперь линію сечения граней S и P . Продолжаемъ слѣды Sv и Pv до пересѣченія въ точкѣ M , оказавшейся на нижней полѣ плоскости V . Соединяемъ точку M съ точкой C , принадлежащей также искомой линіи, и получаемъ линію MS сечения граней S и P .

Намъ нужна также лишь часть EC этой линіи между карнизомъ и конькомъ крыши малой галлерей. Соединяя точку E съ A , получаемъ линію AE сечения грани R съ P .

§ 6. Прямая линия и плоскость.

Прямая линия можетъ занимать относительно плоскости слѣдующія положенія въ пространствѣ:

а) она можетъ лежать въ плоскости;

В. Рѣшеніе.

- b) она можетъ быть ей параллельна;
- c) она можетъ съ ней пересѣкаться. При этомъ:
- d) линія можетъ быть перпендикулярной къ плоскости, или
- e) линія можетъ быть наклоненной къ плоскости подъ даннымъ угломъ.

Не всегда то или иное относительное положеніе прямой и плоскости ясно характеризуется взаимнымъ положеніемъ ихъ проекцій.

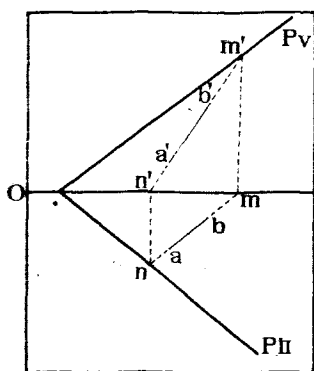
Въ большинствѣ случаевъ для выясненія истиннаго положенія прямой и плоскости необходимо прибѣгать къ вспомогательнымъ построеніямъ.

Плоскость чаще всего задается въ проекціяхъ либо ея слѣдами на V и H , либо двумя пересѣкающимися линіями.

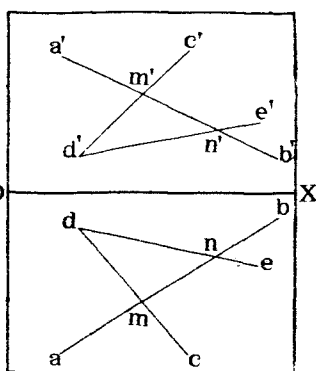
Въ дальнѣйшемъ, разсматривая разные случаи взаимнаго расположенія прямой линіи и плоскости, мы будемъ параллельно рѣшать задачу при обоихъ видахъ заданія плоскости.

a) *Прямая линія лежитъ въ плоскости.*

Если прямая линія лежитъ въ плоскости, то она должна имѣть съ ней по крайней мѣрѣ двѣ общія точки. Поэтому для того, чтобы задаться въ плоскости прямой линіей, достаточно соединить между собой



Черт. 107.



Черт. 108.

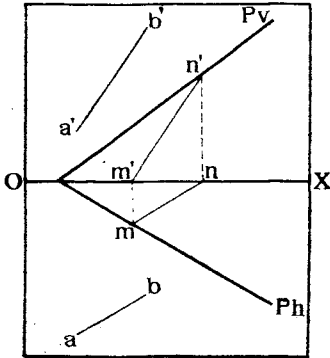
двѣ точки, завѣдомо лежащія въ плоскости. На черт. 107 плоскость P задана слѣдами, на которыхъ выбраны двѣ точки M и N . Линія AB , проходящая черезъ эти точки, будетъ лежать въ плоскости P . На чертѣжѣ 108 плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями DC и DE . Задаваясь на этихъ прямыхъ точками M и N и соединяя ихъ другъ съ другомъ, получимъ прямую AB , лежащую въ данной плоскости.

Для того, чтобы узнать, лежитъ ли данная прямая въ данной плоскости, слѣдуетъ опредѣлить, нѣтъ ли двухъ точекъ общихъ и прямой

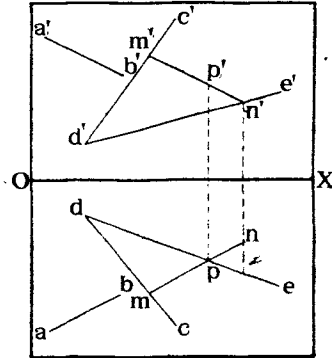
линии и плоскости. Напримѣръ, линия AB (черт. 107) при своемъ продолженіи пересѣкаетъ слѣды плоскости P въ точкахъ M и N , слѣдовательно, AB лежитъ въ плоскости P . Точно также линия AB (черт. 108) пересѣкаетъ линии DC и DE въ точкахъ M и N , поэтому AB лежитъ въ плоскости CDE .

б) *Прямая линия параллельна плоскости.*

Если прямая линия параллельна плоскости, то въ послѣдней всегда можно провести линію, параллельную данной прямой. Поэтому для того, чтобы узнать, параллельна ли прямая AB плоскости P (черт. 109), слѣдуетъ въ послѣдней выбрать какую-нибудь точку, напримѣръ, M на слѣдѣ Ph , и провести черезъ нее прямую MN , параллельную AB .



Черт. 109.



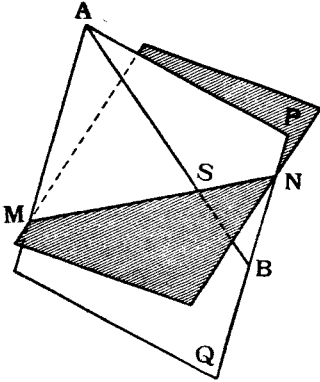
Черт. 110.

Если вертикальный слѣдъ N прямой MN расположится на слѣдѣ Pv плоскости, то это покажетъ, что прямая MN лежитъ въ плоскости P , а, слѣдовательно, AB параллельна P , какъ это и имѣетъ мѣсто на чертѣ 109. Если же точка N не попадетъ на слѣдъ Pv , то MN не будетъ лежать въ плоскости P , и прямая AB не будетъ параллельна P .

Если плоскость задана двумя пересѣкающимися прямыми линиями CD и ED (черт. 110), то для того, чтобы узнать, параллельна ли прямая AB этой плоскости, выбираемъ случайную точку M на одной изъ прямыхъ, напримѣръ, CB , проводимъ черезъ M прямую MN , параллельную AB , и смотримъ, лежитъ ли MN въ плоскости CDE или нѣтъ. Въ данномъ случаѣ точки n' и p пересѣченія проекцій $m'n'$ съ $d'e'$ и mn съ de лежатъ не на одномъ перпендикулярѣ къ оси, слѣдовательно, по теоремѣ 8-й (стр. 30) прямая MN не пересѣкается съ DE , а потому MN не будетъ лежать въ плоскости CDE , и прямая AB не будетъ параллельна этой плоскости.

с) Прямая линия перескается с плоскостью.

На чертежѣ 111 показаны въ пространствѣ плоскость P и прямая AB . Найдемъ точку M пересѣченія AB съ P . Для этого въ пространствѣ необходимо сдѣлать слѣдующія построения:



Черт. 111.

Проведемъ черезъ AB случайную плоскость Q и найдемъ линію MN сѣченія плоскостей P и Q . Точка S пересѣченія прямыхъ AB и MN и будетъ искомой.

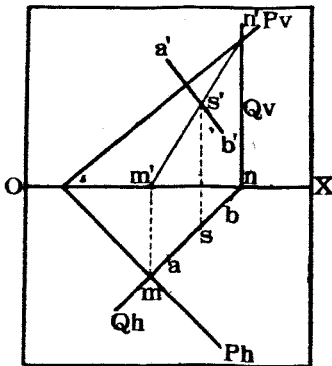
Рѣшимъ теперь эту задачу въ проеціяхъ.

На черт. 112 плоскость P задана слѣдами.

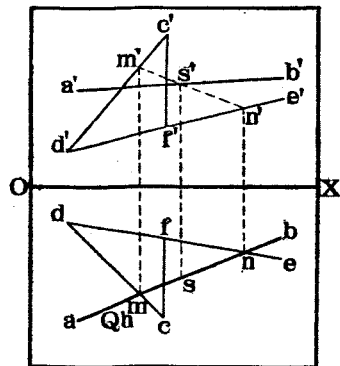
Проведемъ черезъ AB плоскость Q , напримѣръ, перпендикулярно къ H . Тогда слѣдъ Qh сольется съ ab , а Qv пойдетъ перпендикулярно OX .

Найдемъ линію MN пересѣченія P съ Q и замѣтимъ точку S пересѣченія AB съ MN .

Пусть теперь плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями CB и BE (черт. 113). Найдемъ пересѣченіе съ нею линіи AB .



Черт. 112.



Черт. 113.

Проведемъ черезъ AB плоскость Q перпендикулярно къ H . Слѣдъ Qh сольется съ ab .

Всѣ точки, находящіяся въ плоскости Q , будутъ въ проеціи на H располагаться по слѣду Qh , такъ какъ Q проведена перпендикулярно къ H . Поэтому и точки M и N пересѣченія прямыхъ CD и BE съ Q въ горизонтальной проеціи также должны лежать на Qh , но въ то же

время эти точки лежат и на прямых CD и DE . Поэтому горизонтальная проекция m и n этих точек определяются пересечением Qh с cd и de . Вертикальная же проекция m' и n' должны лежать на соответственных вертикальных проекциях $c'd'$ и $d'e'$ прямых.

Соединяем точки m' и n' и замечаем точку s' пересечения $a'b'$ с $m'n'$. Горизонтальная проекция s будет лежать на Qh . Точка S и будет искомой.

Если одна из линий, например, CF (черт. 113), определяющих плоскость, является профильной, то ее можно сейчас же заменить другою, например, DF , лежащей в той-же плоскости, и решать задачу, как было выше объяснено.

Въ случаѣ, если требуется найти сѣченіе плоскости съ профильной линіей, то вспомогательную плоскость слѣдуетъ проводить черезъ эту линію не перпендикулярно къ H , а случайно. На черт. 114 задана плоскость двумя пересѣкающимися линіями CB и ED , требуется найти пересѣченіе этой плоскости съ профильной линіей AB .

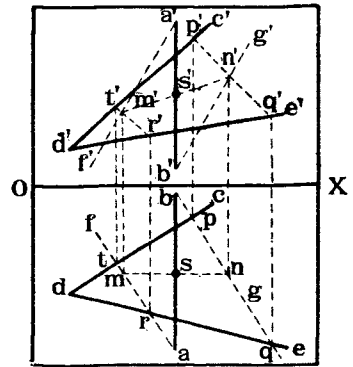
Проведемъ черезъ точки A и B двѣ случайныя, но взаимно параллельныя линіи AF и BG , которыя будутъ лежать съ AB въ одной вспомогательной плоскости. Найдемъ, какъ ранѣе было указано, точки M и N пересѣченія линій AF и BG съ плоскостью CDE .

Очевидно, линія MN и будетъ являться линіей сѣченія данной плоскости съ вспомогательной $AFBG$. Точка же S пересѣченія линій MN и AB и будетъ искомой.

Приемъ, показанный на черт. 114, примѣняется и для нахождения линіи сѣченія двухъ плоскостей, каждая изъ которыхъ задана двумя пересѣкающимися или параллельными линіями. Для опредѣленія искомой линіи слѣдуетъ найти точки пересѣченія каждой изъ двухъ линій одной плоскости съ плоскостью двухъ другихъ и соединить полученныя точки прямой линіи, которая и будетъ искомой.

Вышеприведенныя разсужденія приводятъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 13. Для опредѣленія въ пространствѣ точки пересѣченія прямой линіи съ плоскостью достаточно сдѣлать слѣдующія построенія: 1) провести черезъ прямую вспомогательную плоскость; 2) найти вспомогательную линію пересѣченія этой плоскости въ данной плоскости. Точка пересѣченія вспомогательной прямой съ данной линіей и будетъ искомой.

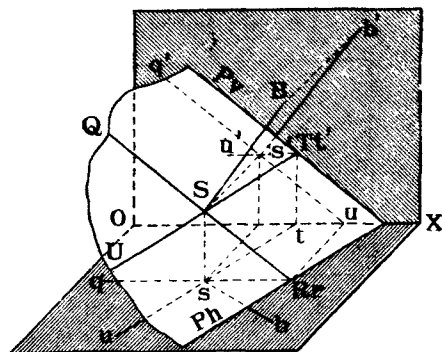


Черт. 114.

Теорема 14. Если линия перпендикулярна къ плоскости, то проекція этой линии перпендикулярна къ соответственнымъ слѣдамъ плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ горизонтальная проекція этой линии \perp къ горизонтальной проекціи горизонтали, а вертикальная проекція линии \perp къ вертикальной проекціи фронтали плоскости.

Доказательство. Пусть дана въ пространствѣ какая-нибудь плоскость P (черт. 116). Предположимъ, что изъ точки B , лежащей внѣ плоскости, проведенъ перпендикуляръ къ плоскости, пересѣкающей последнюю въ точкѣ S .

Проведемъ черезъ точку S въ плоскости P двѣ линіи горизонталь UT и фронталь QR . Очевидно, линія BS будетъ перпендикулярна къ UT и къ QB .



Черт. 116.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ въ пространствѣ два прямыхъ угла BSU и BSQ , изъ которыхъ у каждого одна сторона параллельна одной изъ плоскостей проекцій. Поэтому, на основаніи теоремы 9-й (стр. 33), уголь BSU спроектируется безъ искаженія на H , а уголь BSQ спроектируется безъ искаженія на V . Имѣя же въ виду, что $SU \parallel Ph$ и $SQ \parallel Pv$, заключаемъ, что bs будетъ перпендикулярно Ph , а $b's'$ — перпендикулярно Pv , что и требовалось доказать въ первой части теоремы.

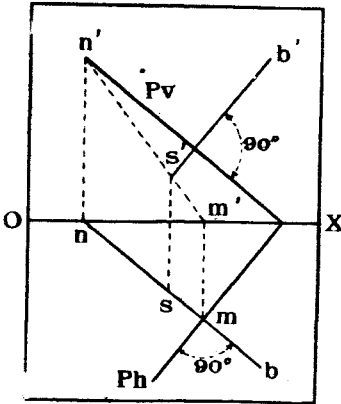
На черт. 117 показано въ проекціяхъ проведеніе перпендикуляра изъ точки B къ плоскости P . Точка S пересѣченія его съ P найдена такъ же, какъ это было уже объяснено ранѣе (черт. 112).

Если плоскость задана не слѣдами, а двумя пересѣкающимися линіями (черт. 118) и требуется изъ какой-нибудь точки B , находящейся внѣ плоскости, опустить на последнюю перпендикуляръ, то задачу можно свести къ предыдущей, построивъ слѣды данной плоскости, или же, что проще, построить въ данной плоскости линіи, параллельныя этимъ слѣдамъ, т. е. провести горизонталь BT и фронталь BQ , какъ это было уже показано ранѣе (черт. 92), а затѣмъ провести $ba \perp dt$ и $b'a' \perp d'q'$. Линія AB и будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Это построеніе объясняетъ вторую часть теоремы 14-й.

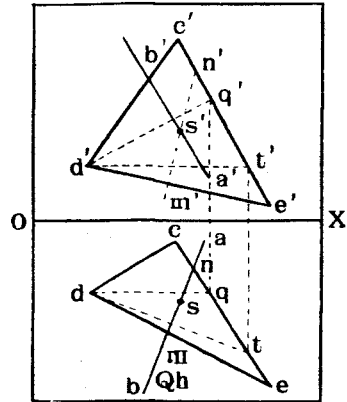
Точка S встрѣчи перпендикуляра съ плоскостью найдется по ранѣе приведеннымъ правиламъ (теорема 13, стр. 53) при помощи вспомогательныхъ: плоскости Q и линіи MN .

Изъ рассмотрѣнія различныхъ чертежей, гдѣ изображались плоскости, заданныя пересѣкающимися линіями (черт. 108, 110, 113, 114, 118),

видно, что при рѣшеніи задачъ осью проекцій пользоваться не приходилось, и достаточно было имѣть лишь обозначенія разныхъ точекъ проекцій фигуръ для того, чтобы знать направленіе оси OX , которая должна быть перпендикулярна къ линіямъ, соединяющимъ разноименныя проекціи одной и той же точки. Поэтому, часто въ нѣкоторыхъ курсахъ Начертательной Геометріи оси проекцій не прочерчиваютъ, имѣя въ виду, что ее всегда легко въ случаѣ надобности возстановить.



Черт. 117.



Черт. 118.

Мы, однако, оставляемъ эту ось на чертежѣ, такъ какъ она все же часто необходима при рѣшеніи разныхъ задачъ и, кромѣ того, является основной линіей, относительно которой ориентируются обѣ проекціи изображаемаго предмета, и которой обѣ эти проекціи раздѣляются.

Задача № 12. На чертежѣ 119 изображенъ въ ортогональныхъ проекціяхъ передній руль высоты аэроплана. Руль состоитъ изъ деревянной рамы $ABCD$, растянутой проволочными стяжками AC и BD . Рама обшивается матеріей, на чертежѣ не показанной. Руль можетъ вращаться вокругъ горизонтальной оси FG , подшипники которой помѣщаются въ углу стрѣлъ HF , IF , и KG , LG , идущихъ къ корпусу аэроплана. Для того, чтобы поворачивать руль вокругъ оси GF , необходимо въ центрѣ его E укрѣпить на оси GF металлическій стержень MN , перпендикулярный къ рамѣ. Къ концамъ этого стержня прикрѣпляются стальные тросы, идущіе къ штурвалу, управляемому пилотомъ изъ гондолы аэроплана.

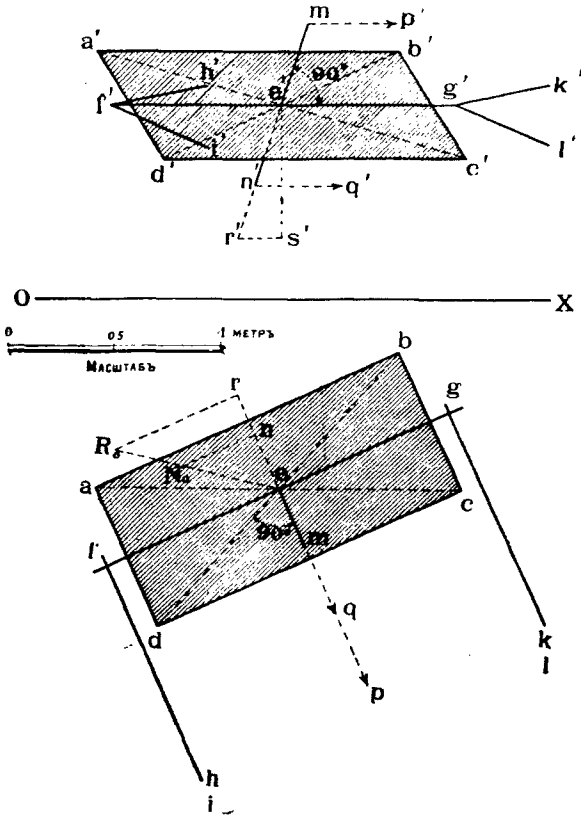
Требуется показать на чертежѣ проекціи стержня MN , имѣя въ виду, что истинная длина его должна быть 1 метръ, и прикрѣпляется онъ къ оси GF своей серединой.

Рѣшеніе. Разсматривая чертежъ 119, видимъ, что линіи DC и AB являются горизонталями плоскости руля, а діагональ AC —фронталью той же плоскости. Поэтому на основаніи теоремы 14-й (стр. 55), проводимъ черезъ точку e линію $em \perp ac$, а черезъ точку e' —линію $n'm' \perp a'c'$ и принимаемъ NM за ось искомаго стержня. Теперь найдемъ проекцію его концовъ, зная, что длина его должна равняться 1 метру.

Зададимся на линіи NM какой-нибудь точкой R и опредѣлимъ, пользуясь тео-

ремой 4-й (стр. 21) длину отрезка RE , которая выражается гипотенузой R_0e прямоугольного треугольника R_0re , катет которого R_0r равен $e's'$.

Отложимъ теперь на гипотенузѣ eR_0 отъ точки e отрезокъ eN_0 , равный 0,5 метр., и проведемъ $N_0n \parallel R_0r$ до пересѣченія съ rm въ точкѣ n . Эта точка и будетъ про-



Черт. 119.

екціей конца стержня. Далѣе откладываемъ $em = e'n$ и находимъ проекціи n' и m' . На чертежѣ показаны также части тросовъ MP и NQ , идущихъ отъ концовъ стержня LM къ штурвалу.

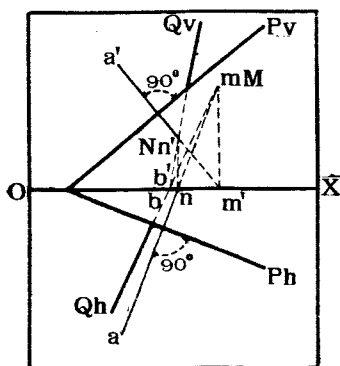
§ 7. Плоскости взаимно перпендикулярныя или параллельныя.

Если одна плоскость перпендикулярна къ другой, то первая должна заключать въ себѣ линію, перпендикулярную ко второй. Поэтому, для проведенія какой нибудь плоскости, перпендикулярной къ данной плоскости, достаточно провести какую-нибудь линію, перпендикулярную къ данной плоскости, и через эту линію провести какую-нибудь плоскость, которая и будетъ искомой.

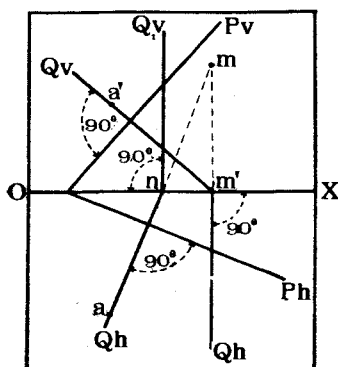
На черт. 120 показано въ проекціяхъ проведеніе плоскости Q , перпендикулярной къ данной плоскости P .

Плоскость P задана слѣдами Pv и Ph , кромѣ того, дана точка A (a, a') черезъ которую требуется провести плоскость Q , перпендикулярную къ P . Проводимъ черезъ A линію AM , перпендикулярную къ P . Согласно теоремѣ 14 (стр. 55) должно быть $a'm' \perp Pv$ и $am \perp Ph$.

По теоремѣ 5-й (стр. 22) находимъ слѣдъ линіи AM , именно, горизонтальный M ($m'm$), лежащій на задней полѣ H и вертикальный N (n, n'). Проводимъ теперь черезъ точку M (m) случайную линію Qh , которую и принимаемъ за горизонтальный слѣдъ искомой плоскости.



Черт. 120.



Черт. 121.

Вертикальный слѣдъ Qv ея долженъ проходить черезъ точку B (b, b') схода слѣдовъ и черезъ точку N (n, n'). Плоскость Q потому заключаетъ въ себѣ линію AM , что слѣды линіи M и N лежатъ на слѣдахъ плоскости.

Если бы плоскость P была задана не слѣдами, а двумя случайными линіями, то ходъ рѣшенія задачи остается тотъ же самый, только сначала необходимо найти горизонталь и фронталь заданной плоскости, какъ это объяснено ранѣе на черт. 118.

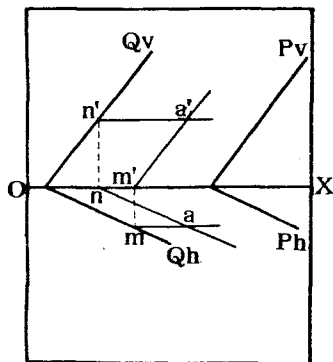
Въ частномъ случаѣ можно одинъ изъ слѣдовъ Qv или Qh (черт. 120) провести перпендикулярно къ оси OX ; тогда и плоскость Q , будучи перпендикулярной къ P , расположится перпендикулярно къ одной изъ плоскостей проекціи. Напримѣръ, на черт. 121 изображены двѣ проходящія черезъ точку A плоскости: Q , перпендикулярная къ P и къ V , и плоскость Q_1 , перпендикулярная къ P и къ H .

Если даны: плоскость и точка внѣ ея, и черезъ точку требуется провести плоскость, параллельную данной, то для этого достаточно черезъ точку провести двѣ линіи, параллельныя двумъ какимъ-нибудь пересѣ-

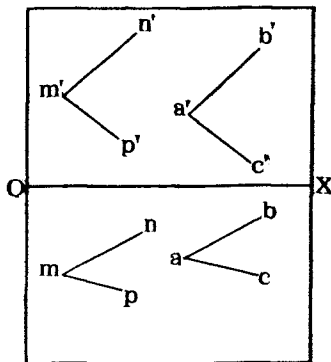
кающимися линиямъ, лежащимъ въ данной плоскости. Новыя линіи и опредѣляютъ искомую плоскость.

На черт. 122 даны: точка A и плоскость P . Проводимъ черезъ A двѣ линіи: одну AM , параллельную Pv ($a'm' \parallel Pv$ и $am \parallel OX$), и другую AN , параллельную Ph ($an \parallel Ph$ и $a'n' \parallel XO$).

Плоскость, опредѣляемая линіями AN и AM , будетъ параллельна плоскости P .



Черт. 122.



Черт. 123.

Если бы мы построили слѣды этой плоскости, то увидѣли бы, что $Qh \parallel Ph$ и $Qv \parallel Pv$.

Если плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями MN и MP (черт. 123), то для проведения черезъ точку A плоскости, параллельной MNP , проведемъ черезъ A линіи $AB \parallel MN$ и $AC \parallel MP$. Плоскость ABC и будетъ искомой.

Задача 13. На чертежѣ 124 изображено наклонное прямоугольное зеркало, и показана свѣтящаяся точка S (s, s'). Въ точкѣ M (m, m') помѣщается глазъ человѣка. Опредѣлить на зеркалѣ точку, въ которой отразится отъ послѣдняго лучъ, идущій изъ S и попадающій въ точку M .

Рѣшеніе. Изъ физики известно, что если лучъ SN (черт. 125) падаетъ въ точкѣ N на зеркало Q и отражается отъ него по направленію NM , то уголъ SNR паденія долженъ быть равенъ углу MNR отраженія, при чемъ линія RN является перпендикуляромъ къ зеркалу въ точкѣ N .

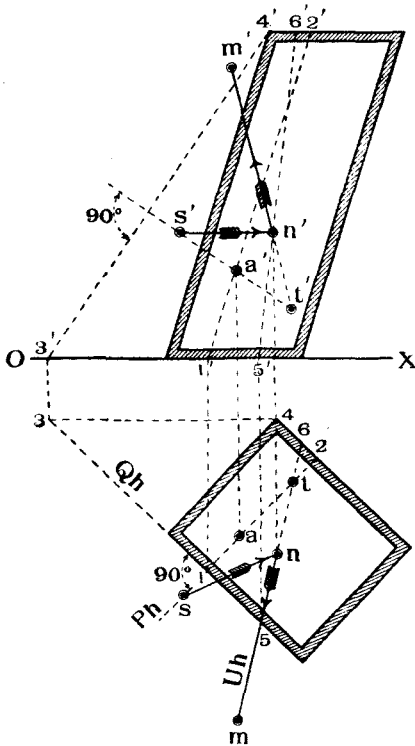
Для рѣшенія задачи въ пространствѣ проводимъ черезъ точку S линію ST , перпендикулярную къ зеркалу. Пусть эта линія пересѣчетъ зеркало въ точкѣ A . Откладываемъ $TA = SA$ и соединяемъ T съ M . Линія TM пересѣчетъ зеркало въ искомой точкѣ N , такъ какъ въ плоскости SMT перпендикулярной къ Q , мы имѣемъ углы:

$$NST = STN = \alpha = RNM = RNS.$$

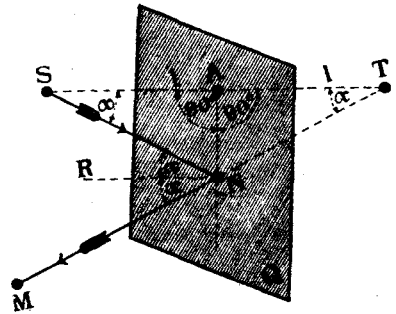
Въ проекціяхъ задача рѣшается слѣдующимъ образомъ (черт. 124): проводимъ въ плоскости Q фронталь $3'4'$, 34 и замѣчаемъ горизонтальный слѣдъ зеркала Qh .

Опускаемъ изъ точки S перпендикуляръ къ зеркалу, для чего проводимъ $st \perp Qh$ и $s't' \perp 3'4'$ (теорема 14-я стр. 55). Находимъ пересѣченіе A этого перпендикуляра

съ зеркаломъ. Для этого заключаемъ линію ST въ плоскость P , перпендикулярную къ H , и находимъ линію $1\ 2, 1' 2'$ сѣченія плоскостей P и Q . Точка a' пересѣченія линій $1' 2'$ и $s't'$ опредѣлитъ вертикальную проекцію точки A , горизонтальная— a будетъ лежать на линіи st . Далѣе, намъ слѣдуетъ отложить въ пространствѣ $TA = SA$. На основаніи теоремы 6 (стр. 26) откладываемъ $ta = sa$ и $t'a' = s'a'$. Соединяемъ точки m съ t и m' съ t' и находимъ точку $N (n', n)$ пересѣченія линіи MT съ плоскостью Q , для чего проводимъ черезъ MT вспомо-



Черт. 124.



Черт. 125.

могательную плоскость U , которая пересѣкается съ Q по линіи $5'6', 56$. Точка N опредѣляется пересѣченіемъ линіи 56 и M .

§ 8. Опредѣленіе видимости геометрическихъ элементовъ.

Для наглядности изображенія въ ортогональныхъ проекціяхъ принято отдѣлять видимыя части геометрическихъ элементовъ отъ невидимыхъ, вычерчивая проекціи видимыхъ линій сплошной чертой, а невидимыхъ—пунктиромъ.

При опредѣленіи видимости частей предполагается, что какъ плоскости проекцій, такъ и всянія другія—непрозрачны, такъ что, если такая плоскость находится между глазомъ наблюдателя и рассматриваемой линіей, то послѣдняя считается невидимой, и потому проекція ея должна быть вычерчена пунктиромъ.

Такъ какъ въ ортогональныхъ проекціяхъ мы имѣемъ дѣло съ двумя прямоугольными проекціями предметовъ на V и H , то слѣдуетъ отдѣльно опредѣлять видимость частей въ каждомъ изображеніи, при чемъ, въ виду

параллельности проектирующихъ лучей, предполагаются точки зрѣнія бесконечно удаленными.

При разсматриваніи горизонтальной проекціи предполагается, что лучи идутъ отъ бесконечно удаленной точки C_{∞} и перпендикулярны къ H (черт. 126). Если лучъ встрѣтитъ какую нибудь точку M раньше, нежели непрозрачную плоскость S , то точка M будетъ видима относительно S ; если же лучъ сначала пересѣчетъ плоскость въ какой-нибудь точкѣ N , а потомъ уже пройдетъ черезъ разсматриваемую точку M_1 , то послѣдняя будетъ невидима.

Точно также при направленіи лучей зрѣнія, перпендикулярномъ къ V , точка P будетъ видима, если лучъ $C_{\infty}P$ сначала встрѣтитъ точку P , а потомъ уже плоскость S . Если же точка Q пересѣченія луча съ плоскостью встрѣтится раньше разсматриваемой точки P_1 , то послѣдняя будетъ невидима. Если плоскость ограничена, то одна и та же точка, напримѣръ, P_1 можетъ быть видима, если смотрѣть на H , и невидима, если смотрѣть на V и наоборотъ. Наконецъ, точка можетъ быть при обоихъ направленіяхъ лучей зрѣнія видимой, какъ P , или невидимой, какъ M_1 .

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что видимость любой точки относительно плоскости опредѣляется сравненіемъ разстоянія этой точки до плоскости проекцій съ разстояніемъ до той же плоскости проекціи точки встрѣчи луча съ разсматриваемой плоскостью, именно (черт. 126), если:

$Mn > Nn$,	то точка	M	видима,	если	смотримъ	на	H .
$M_1n < Nn$,	»	»	M_1 невидима,	»	»	»	H .
$Pq' > Qq'$,	»	»	P видима,	»	»	»	V .
$P_1q' < Qq'$,	»	»	P_1 невидима,	»	»	»	V .

Длины этихъ отрѣзковъ, измѣряемая вдоль линій параллельныхъ H или V , проектируются на H или на V безъ искаженія. Поэтому, если мы въ проекціяхъ опредѣлимъ точки N или Q пересѣченія лучей съ плоскостью и сравнимъ разстоянія проекцій точекъ N или Q отъ оси съ разстояніями проекцій отъ той же оси данной точки, то можемъ опредѣлить и видимость точекъ, напримѣръ (черт. 126) если:

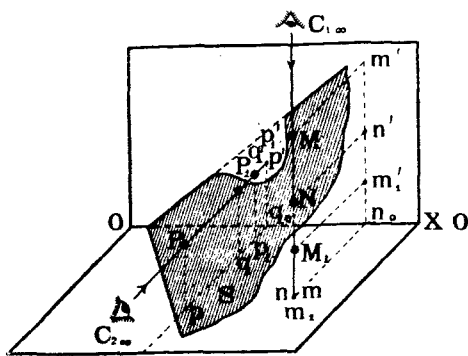
$m'n_0 > n'n_0$,	то точка	M	видима,	если	смотримъ	на	H .
$m_1'n_0 < n'n_0$,	»	»	M_1 невидима,	»	»	»	H .
$pq_0 > qq_0$,	»	»	P видима,	»	»	»	V .
$p_1q_0 < qq_0$,	»	»	P_1 невидима,	»	»	»	V .

На чертежѣ 127 та же задача рѣшена въ проекціяхъ. Дана плоскость S и точки M , M_1 , P и P_1 . Для опредѣленія точки встрѣчи съ S луча,

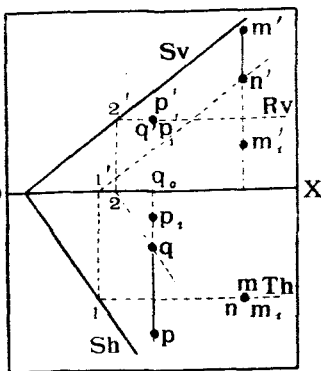
проходящаго черезъ точки M, M_1 и перпендикулярнаго къ H , проведемъ черезъ него плоскость T , параллельную V , и найдемъ, какъ было ранѣе сказано (стр. 48) линію (фронталь) $1n, 1'n'$ сѣченія T съ S . Точка N пересѣченія линій $1N$ и MM_1 , и будетъ точкой пересѣченія луча съ S ; такъ какъ m' дальше отстоитъ отъ OX , нежели n' , то точка M будетъ видима, если смотрѣть на H .

Точка же M_1 будетъ невидима, если смотрѣть на H , такъ какъ m_1' ближе къ OX , нежели n' .

Для опредѣленія видимости точекъ P и P_1 , если смотрѣть на V , проводимъ черезъ нихъ лучъ, перпендикулярный къ V , и находимъ пересѣченіе его съ S . Для этого лучъ заключаемъ въ плоскость R , парал-



Черт. 126.



Черт. 127.

лельную H , и находимъ линію (горизонталь) $2Q$ сѣченія плоскостей S и R ; искомая точка Q опредѣлится какъ точка встрѣчи линій PP_1 и $2Q$.

Такъ какъ $p q_0 > q q_0$, то точка P будетъ видима, если смотрѣть на V ; точка же P_1 будетъ невидима, такъ какъ $p_1 q_0 < q q_0$.

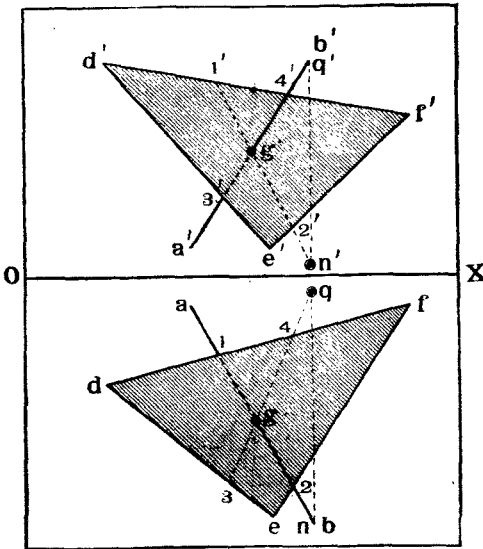
Разсмотримъ теперь опредѣленія видимости отрѣзка прямой линіи AB (черт. 128) относительно плоскости, при чемъ послѣднюю будемъ предполагать ограниченной и заданной въ видѣ треугольника DEF .

Найдемъ сначала по общему правилу (теорема 13, стр. 53) точку G пересѣченія AB съ DEF , для чего служить вспомогательная линія ($12, 1'2'$) сѣченія DEF съ плоскостью, проектирующей AB на H . Точка G будетъ служить границей видимости прямой AB въ каждой проекціи. Опредѣлимъ, будетъ ли видима точка B , если смотрѣть на H .

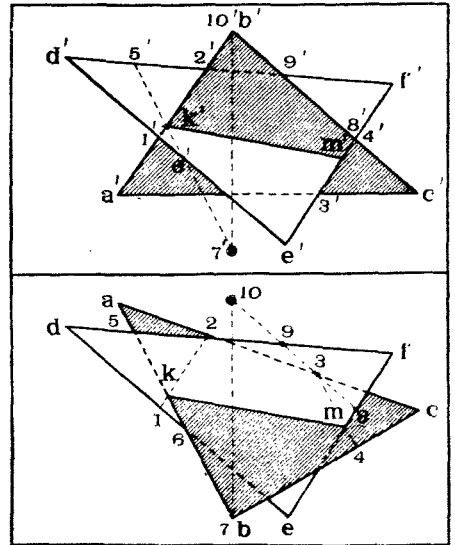
Согласно вышеизложенному способу (черт. 127) проводимъ черезъ B лучъ, перпендикулярный къ H , и находимъ точку N пересѣченія его съ DEF (вспомогательная линія $1,2$). Точка N оказалась ниже B , поэтому D будетъ видна, если смотрѣть на H и, слѣдовательно, часть bg гори-

зонтальной проекціи ab слѣдуетъ вычертить сплошной чертой, часть же ag отъ точки g до контура треугольника dfe необходимо чертить пунктиромъ, наконецъ, отръзокъ $a1$ также вычерчивается сплошной чертой, такъ какъ треугольникъ, будучи ограниченъ, не закроетъ точки a .

Подобнымъ же образомъ опредѣляемъ видимость точки B въ проекціи на V , для чего проводимъ черезъ B лучъ, перпендикулярный къ V . Лучъ этотъ пересѣкаетъ плоскость BEF въ точкѣ Q (вспомогательная линия 34, $3'4'$), которая ближе къ V , нежели точка B , поэтому точка B будетъ видима, и отръзокъ $b'g'$ долженъ быть вычерченъ сплошной линіей.



Черт. 128.



Черт. 129.

Отръзокъ AG будетъ лежать сзади плоскости DEF и часть его проекціи отъ точки g до контура треугольника будетъ вычерчена пунктиромъ.

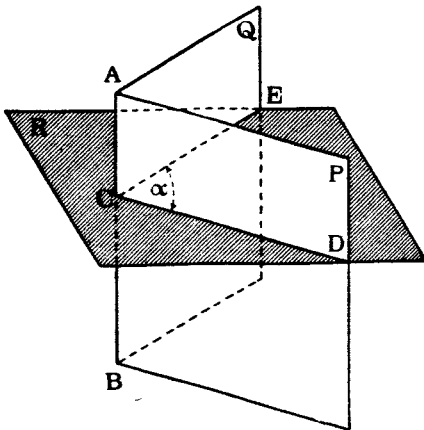
Рѣшимъ теперь задачу на опредѣленіе видимости частей двухъ пересѣкающихся треугольниковъ (черт. 129).

Находимъ сначала обычнымъ способомъ линію KM ихъ сѣченія, для чего служатъ вспомогаельныя линіи **12** и **34**. Опредѣлимъ теперь видимость точки B треугольника ABC относительно H . Опускаемъ изъ B перпендикуляръ къ H и находимъ, какъ ранѣе было объяснено, точку **7** пересѣченія его съ плоскостью треугольника DEF , для чего служить вспомогаельная линія **56**. Такъ какъ точка **7** лежитъ ниже B , то, слѣдовательно, B видима, если смотрѣть на H . Поэтому часть $MKBC$ треугольника ABC будетъ видима. Проведемъ теперь черезъ B

лучь, перпендикулярный къ V , и найдемъ точку **10** пересѣченія его съ плоскостью треугольника DEF . Такъ какъ точка **10** лежитъ ближе къ V нежели точка B , то послѣдняя будетъ видна, если смотрѣть на V , а, слѣдовательно, будетъ видна и часть $MKBC$ треугольника ABC . На чертежѣ 129 проекціи видимыхъ частей треугольника ABC заштрихованы. Замѣтимъ, что въ каждой проекціи части одного треугольника, лежація внѣ контура другого, будутъ видимы. Кромѣ того, всегда видимыми будутъ линіи общаго контура всѣхъ фигуръ каждой проекціи.

§ 9. Изображеніе многогранниковъ.

Напомнимъ здѣсь нѣкоторыя положенія изъ элементарной геометріи. Если имѣются въ пространствѣ двѣ плоскости P и Q (черт. 130), пересѣкающіяся между собою по линіи AB , то эти плоскости образуютъ *двугранный уголъ* при ребрѣ AB .



Черт. 130.

Мѣрою этого двуграннаго угла служитъ линейный уголъ $DCE = \alpha$, образованный линіями сѣченія сторонъ или граней угла P и Q съ плоскостью B , перпендикулярной къ ребру AB .

Если въ какой нибудь точкѣ S пространства будетъ пересѣкаться болѣе двухъ плоскостей, но между послѣдними образуется *пространственный или тѣлесный уголъ*, который называется *трегран-*

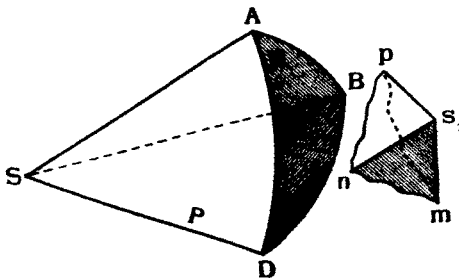
нымъ, четырехраннымъ и т. д. въ зависимости отъ числа плоскихъ граней, пересѣкающихся въ его вершинѣ S .

Напримѣръ, на черт. 131 показанъ *трегранный уголъ* $ABBS$ съ вершиной въ S .

Тѣлесные углы измѣряются слѣдующимъ образомъ:

Опишемъ изъ вершины S угла, какъ изъ центра, шаръ радіуса, равнымъ единицѣ длины, и пусть поверхность этого шара

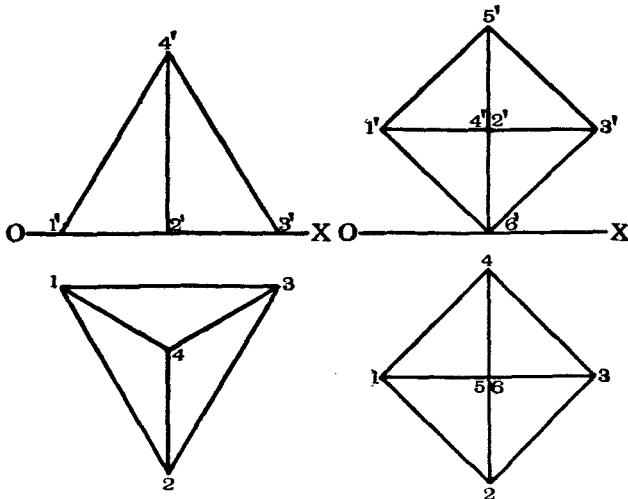
пересѣчетъ ребра тѣлеснаго угла въ точкахъ A , B и D . Очевидно,



Черт. 131.

каждая грань пересѣчетъ поверхность шара по дугамъ AB , DD , DA большихъ круговъ, ограничивающихъ на шарѣ нѣкоторую площадь ABD .

За единицу тѣлеснаго угла принимается такой уголъ, для котораго площадь, отсѣкаемая его гранями на упомянутомъ шарѣ, равна единичнѣ площади. Напримѣръ, если радиусъ шара равнялся 1 метру, то единица площади, соотвѣтствующая единичнѣ тѣлеснаго угла, будетъ равняться 1 кв. метру.



Черт. 132.

Черт. 133.

Выберемъ теперь въ пространствѣ (черт. 131) случайную точку s , и опустимъ изъ нея перпендикуляры s_1u , s_1t и s_1p на грани P , Q , R , или на ихъ продолженія.

Между этими перпендикулярами образуется новый тѣлесный уголъ s_1ptr , который называется *дополнительнымъ* или *полярнымъ* данному $SADD$.

Нѣсколько плоскостей, пересѣкаясь между собой по прямымъ линиямъ, образуютъ поверхность, называемую *многогранной*. Если же плоскости при этомъ замыкаютъ пространство со всѣхъ сторонъ, то онѣ образуютъ *многогранникъ*.

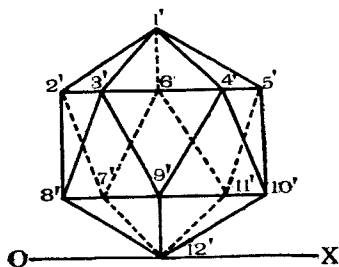
Среди различнаго рода многогранниковъ выдѣляютъ въ особую группу *правильные многогранники*, у каждаго изъ которыхъ равны между собою: всѣ ребра, стороны, плоскіе, двугранные и тѣлесные углы.

Существуетъ пять правильныхъ многогранниковъ:

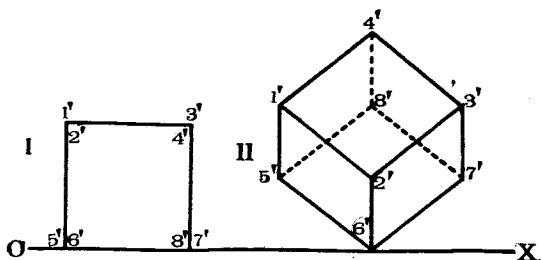
1) *Тетраедръ*, образованный изъ четырехъ равностороннихъ треугольниковъ.

2) *Октаэдръ*, образованный изъ восьми равностороннихъ треугольниковъ.

3) *Икосаэдръ*, образованный изъ двадцати равностороннихъ треугольниковъ.

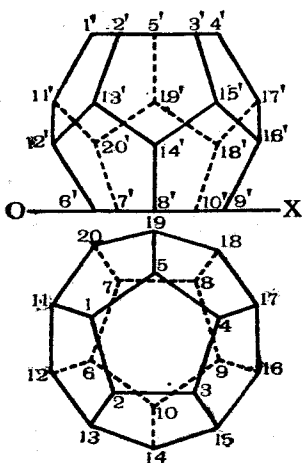


Черт. 134.



Черт. 135.

4) *Кубъ*, образованный изъ шести квадратовъ.



Черт. 136.

5) *Додекаэдръ*, образованный изъ двѣнадцати правильныхъ пятиугольниковъ.

Для изображенія многогранника въ ортогональныхъ проекціяхъ достаточно знать проекціи его вершинъ. Соединяя соответственнымъ образомъ проекціи вершинъ прямыми линіями, можно получить очертанія проекціи многогранника на каждой изъ плоскостей проекцій.

Не входя пока въ подробности того, какъ опредѣляются положенія вершинъ правильныхъ многогранниковъ, приведемъ здѣсь лишь изображенія:

тетраэдра—черт. 132,

октаэдра—черт. 133,

икосаэдра—черт. 134,

куба въ двухъ положеніяхъ: лежащаго гранью на *H* и стоящаго вершиной на *H*, при чемъ діагональ *46* перпендикулярна къ *H* (чертежъ 135),

додекаэдра—черт. 136.

Въ нижеслѣдующей табличкѣ показаны для каждаго изъ правильныхъ многогранниковъ:

- число граней F ;
- » вершинъ S ;
- » реберъ A ;
- » сторонъ фигуры каждой грани n ;
- » реберъ, сходящихся въ каждой вершинѣ, m .

	F	S	A	n	m
Тетраэдръ	4	4	6	3	3
Кубъ	6	8	12	4	3
Октаэдръ	8	6	12	3	4
Додекаэдръ	12	20	30	5	3
Икосаэдръ	20	12	30	3	5

Разсматривая эту табличку, можно замѣтить слѣдующее соотношение между кубомъ и октаэдромъ: для нихъ числа A одинаковы, числа же F и S одинаковы накрестъ, такъ же какъ и числа n и m . Благодаря такому свойству, эти многогранники называютъ *взаимными*.

Додекаэдръ и икосаэдръ также являются взаимными многогранниками. Тетраэдръ является взаимнымъ самому себѣ¹⁾.

Въ видѣ примѣра на чертежахъ 137 и 138 изображено нѣсколько неправильныхъ многогранниковъ, именно, на черт. 137 двѣ пирамиды, изъ которыхъ одна четырехгранная съ основаніемъ $ABCD$, другая трехгранная, наклонная, съ основаніемъ ABC .

На черт. 138 изображены: слѣва, прямая шестигранная призма, а справа, наклонная трехгранная призма.

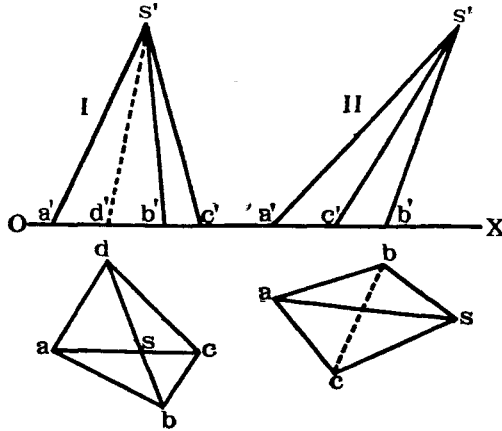
При вычерчиваніи проекцій призмъ, у которыхъ имѣется рядъ взаимно параллельныхъ реберъ, не слѣдуетъ забывать, что одноименныя проекціи такихъ реберъ также будутъ параллельны другъ другу.

На чертежѣ 139 изображенъ еще одинъ многогранникъ, называемый *призматомидомъ* и находящій себѣ примѣненіе въ желѣзнодорожномъ дѣлѣ

¹⁾ Подробности о взаимныхъ многогранникахъ этихъ и другихъ, см. В. Briard „Géométrie Descriptive“. Paris 1911 pg. 54 и Ch. Wiener „Lehrbuch der Darstellenden Geometrie“. Bd. I, Leipzig 1884 st. 142.

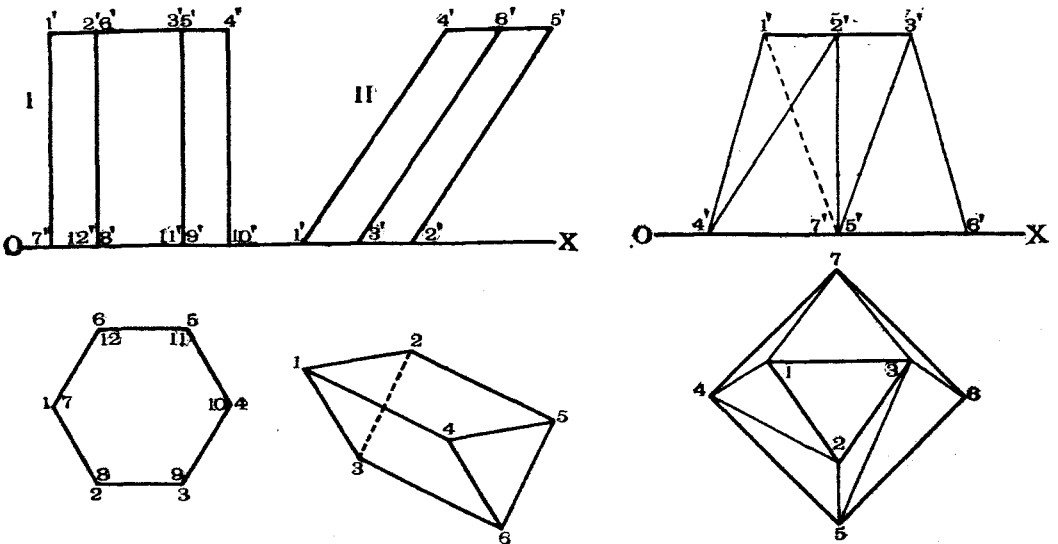
при подсчетѣ земляныхъ работъ насыпей и выемокъ желѣзнодорожнаго полотна.

Призматойдъ ограниченъ двумя параллельными основаніями, которыя могутъ быть и съ неодинаковымъ числомъ сторонъ, и рядомъ треуголь-



Черт. 137.

ныхъ боковыхъ граней, которыя получаются при помощи соединенія каждой вершины одного основанія съ двумя вершинами другого. Призма-



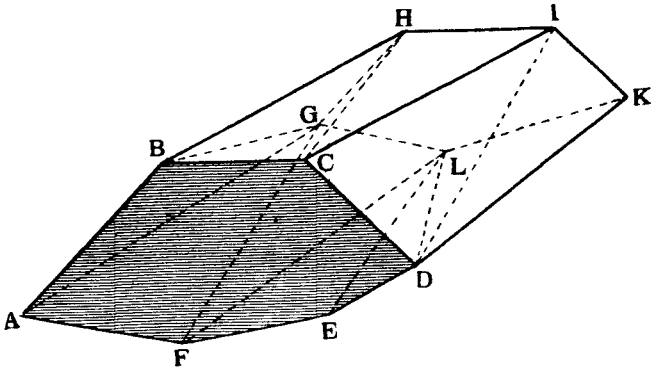
Черт. 138.

Черт. 139.

тоидъ, изображенный на черт. 139, имѣетъ верхнее основаніе въ видѣ треугольника 123, а нижнее—въ видѣ квадрата 4567. Боковую его поверхность составляютъ семь треугольныхъ граней.

На черт. 140 показана часть насыпи желѣзной дороги. Полотно ея $ВСІН$, откосы $СВІК$ и $АВНГ$.

Линіи $AFED$ и GLK —очертанія грунтовой земли въ началѣ и въ концѣ насыпи. Насыпь разсѣчена двумя параллельными сѣченіями $ABCDEF$ и $HIKLG$, изъ которыхъ первое получилось шестиугольнымъ, а второе—пятиугольнымъ.



Черт. 140.

Соединяемъ каждую вершину сѣченія $HIKLG$ съ вершинами другого такъ, чтобы получить рядъ треугольниковъ. Полученное тѣло и будетъ имѣть видъ призматоида ¹⁾.

Такъ какъ объемъ призматоида опредѣляется легко, то потому онъ и примѣняется для подсчета объема земли въ насыпяхъ и въ выемкахъ.

§ 10. Вращеніе.

а) Общія понятія.

Ранѣе было упомянуто (теорема 9, стр. 33), что уголъ между линіями проектируется безъ искаженія, когда плоскость угла параллельна плоскости проекціи. При этомъ и всякая фигура, лежащая въ такой плоскости, параллельной плоскости проекцій, будетъ проектироваться на эту плоскость проекцій безъ искаженія, т. е. проектируются въ натуральную величину длины линій, площади и углы.

Такъ какъ часто плоскость, въ которой лежатъ опредѣляемые геометрическіе элементы, бываетъ расположена не параллельно на одной изъ плоскостей проекцій, то, очевидно, является цѣлесообразнымъ при помощи тѣхъ или иныхъ геометрическихъ дѣйствій достигъ такого выгоднаго расположенія.

Въ ортогональныхъ проекціяхъ для этого служатъ два метода: *вращеніе и перемѣна плоскостей проекцій*.

Разсмотримъ послѣдовательно оба эта метода.

¹⁾ Замѣтимъ, что треугольники CDI и DIK , равно какъ и треугольники ABG и BGH , попарно лежатъ въ одной плоскости.

Методъ вращенія заключается въ томъ, что данную геометрическую фигуру вращаютъ въ пространствѣ вокругъ нѣкоторой оси до тѣхъ поръ, пока она не займетъ выгоднаго положенія относительно плоскости проекцій.

При этомъ всѣ точки вращаемой фигуры будутъ описывать въ пространствѣ дуги круговъ, центры которыхъ располагаются на оси вращенія, а плоскости которыхъ будутъ перпендикулярны къ оси вращенія.

Если ось вращенія выбрана случайной и не перпендикулярной ни къ V ни къ H , то и упомянутые круги вращенія не будутъ параллельными ни V ни H и, слѣдовательно, спроектируются на V и на H въ видѣ эллипсовъ. Такъ какъ построеніе эллипсовъ затруднительно, то поэтому избѣгаютъ выбирать оси вращенія случайнымъ образомъ, а выбираютъ ихъ преимущественно перпендикулярными къ V или къ H .

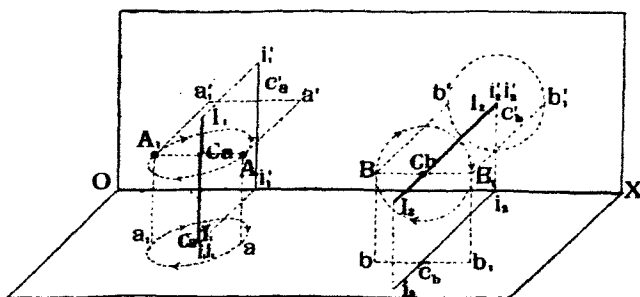
Ось вращенія принято обозначать въ пространствѣ большими буквами II , а ея проекцію—малыми буквами ii и $i'i'$, при чемъ, если приходится пользоваться нѣсколькими осями, то ихъ нумеруютъ по порядку, прибавляя къ буквамъ I значекъ внизу справа.

Разсмотримъ послѣдовательно, какъ отражаются въ проекціяхъ вращеніе точекъ, линий, плоскостей и пространственныхъ тѣлъ сначала вокругъ одной оси, перпендикулярной къ H или къ V , а затѣмъ и послѣдовательное вращеніе вокругъ двухъ такихъ же осей.

b) *Вращеніе вокругъ одной оси, перпендикулярной къ H или къ V .*

а) Вращеніе точки.

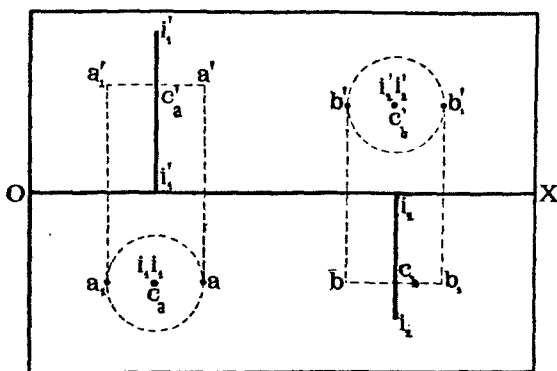
Пусть дана въ пространствѣ ось вращенія I_1I_1 , перпендикулярная къ H (черт. 141 и 142 слѣва), и точка A , которая описываетъ вокругъ I_1I_1 полный кругъ съ центромъ C_a .



Черт. 141.

При такихъ условіяхъ кругъ вращенія точки A спроектируется на H безъ искаженія въ видѣ круга же, а на V въ видѣ прямой, параллельной оси OX .

Если же ось I, I_2 выбрана перпендикулярной къ V (черт. 141 и 142 справа), то кругъ вращения какой-нибудь точки B спроектируется на V безъ искаженія въ видѣ круга же, а на H —въ видѣ прямой, параллельной OX .



Черт. 142.

Центръ C_a вращения точки A спроектируется на H въ центрѣ круга вращения проекціи a точки A , а на V расположится на вертикальной проекціи $i_2'i_2'$ оси вращения на высотѣ точки A .

Аналогично расположится и центр C_b вращения точки B .

Изъ вышеизложеннаго вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 15. При вращеніи точки вокругъ оси, перпендикулярной къ H (къ V), горизонтальная (вертикальная) проекція точекъ описываетъ кругъ съ центромъ въ горизонтальной (вертикальной) проекціи оси вращения, а вертикальная (горизонтальная) проекція точки двигается по линіи, параллельной оси OX .

Слова въ скобкахъ относятся къ случаю, когда ось вращения перпендикулярна къ V .

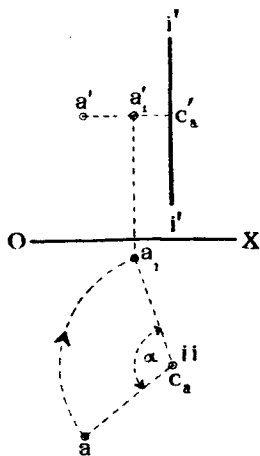
Въ дальнѣйшемъ, въ виду полной аналогіи построеній при вращеніи вокругъ осей, перпендикулярныхъ къ V , съ построеніями при вращеніи вокругъ осей, перпендикулярныхъ къ H , мы будемъ примѣнять лишь послѣднія, имѣя въ виду, что въ случаѣ, если представится необходимость имѣть дѣло съ осью, перпендикулярной къ V , то всѣ построенія, произведенныя ранѣе на H , должны теперь повторены на V , а бывшіе на V —повторены на H .

Рѣшимъ слѣдующую задачу на вращеніе точки:

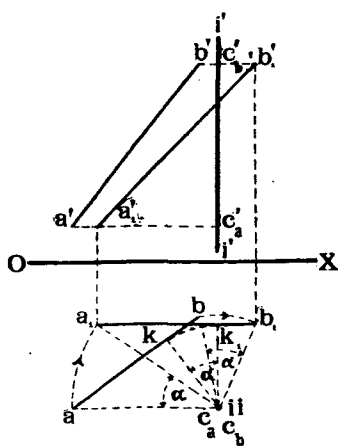
Дана точка A , уголъ α и ось вращения $II \perp H$. Повернуть точку A вокругъ II по направленію движенія часовой стрѣлки на уголъ α (чертежъ 143).

Для рѣшенія задачи соединяемъ точку a съ ii . Съ точкою ii совпа-

даетъ и c_a , горизонтальная проекція центра C_a вращенія точки A . При вращеніи точки ея горизонтальная проекція a опишетъ дугу круга въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, и придетъ въ положеніе a_1 , подчиненное условію, чтобы уголъ $ac_a a_1$, равнялся данному углу α . Вертикальная проекція точки въ это время будетъ двигаться по линіи, перпендикулярной къ $i'i'$, или, что то же, по линіи $a'c'_a$, параллельной оси OX . Проведя изъ a_1 перпендикуляръ къ OX до пересѣченія съ $a'c'_a$, получимъ точку a_1' , вертикальную проекцію повернутой точки.



Черт. 143.



Черт. 144.

Условимся въ дальнѣйшемъ проекціи повернутыхъ точекъ обозначать малыми буквами со значкомъ справа внизу.

β) Вращеніе прямой линіи.

Разсмотримъ вращеніе прямой линіи въ примѣрѣ рѣшенія слѣдующей задачи.

Дана прямая линія AB (черт. 144). Определить истинную длину ея, пользуясь методомъ вращенія.

Выберемъ ось вращенія II , перпендикулярную B , и будемъ вращать AB вокругъ II до тѣхъ поръ, пока AB не станетъ параллельно V ; тогда AB спроектируется на V безъ искаженія. Если AB послѣ поворота будетъ параллельна V , то горизонтальная проекція AB должна быть послѣ поворота параллельной OX .

Это обстоятельство позволяетъ намъ опредѣлить уголъ поворота. Опустимъ изъ точки ii перпендикуляръ ik на ab .

Если послѣ поворота ab должно расположиться параллельно OX , то ik тогда расположится перпендикулярно къ OX . Проводимъ $ik_1 \perp OX$ и равнымъ ik .

Теперь остается через точку k_1 провести линию a_1b_1 , параллельную OX , и отложить на ней $a_1k_1 = ak$ и $b_1k_1 = bk$.

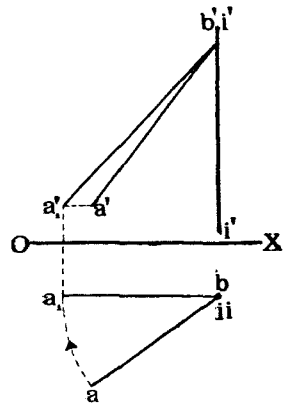
Тѣ же точки a_1 и b_1 можно получить на линии a_1b_1 , засѣкая ее изъ центра ii дугами радиусовъ ai и bi . Очевидно, что будутъ равны между собою углы

$$aia_1 = bib_1 = kik_1.$$

Вертикальныя проекціи точекъ A и B будутъ двигаться по линиямъ, перпендикулярнымъ къ $i'i'$, и найдутся въ точкахъ a_1' и b_1' пересѣченія этихъ линий съ перпендикулярами къ оси OX , проведенными изъ точекъ a_1 и b_1 .

Длина $a_1'b_1'$ равна истинной длинѣ линии AB .

При рѣшеніи этой задачи мы вращали двѣ точки A и B данной прямой. Можно было бы рѣшить ту же задачу проще, проведя ось II вращения через одну изъ точекъ, напримѣръ, B данной прямой (черт. 145). Тогда эта точка, какъ лежащая на оси вращения, при поворотѣ прямой останется неподвижной. Послѣ же поворота горизонтальная проекція прямой должна расположиться параллельно OX . Поэтому для рѣшенія задачи вращаемъ ab вокругъ точки ii до тѣхъ поръ, пока ab не займетъ положеніе $a_1b \parallel OX$.



Черт. 145.

Точка a_1' опредѣлится пересѣченіемъ линий $a, a_1' \perp OX$ и $a'a_1' \perp i'i'$. Линія $a_1'b'$ будетъ вертикальной проекціей повернутой линіи и будетъ выражать истинную длину отрезка AB .

Можно было бы ту же самую задачу рѣшить, повернувъ прямую въ положеніе, параллельное H . Для этого пришлось бы воспользоваться осью вращения, перпендикулярною къ V .

γ) Вращеніе плоскости.

Разсмотримъ вращеніе плоскости въ двухъ случаяхъ ея заданія: слѣдами и случайными пересѣкающимися прямыми линіями.

На черт. 146 задана плоскость P слѣдами Pv, Ph .

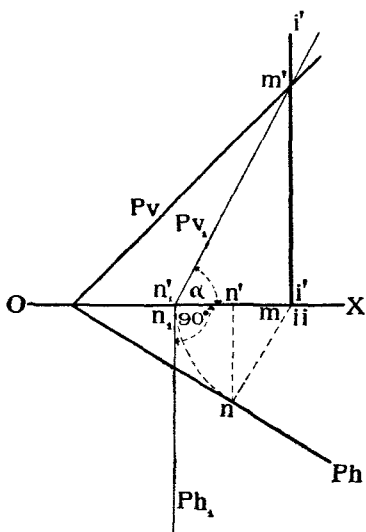
Предположимъ, что требуется опредѣлить уголъ наклона P къ H .

Если бы P была задана перпендикулярной къ V , то тогда искомымъ угломъ спроектировался бы на V безъ искаженія и былъ бы равенъ углу между вертикальнымъ слѣдомъ и осью OX .

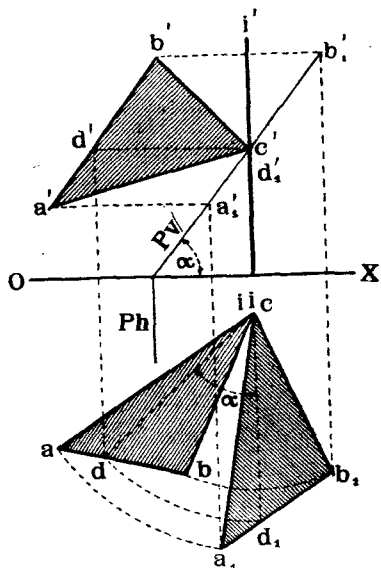
Приведемъ плоскость къ такому заданію, пользуясь методомъ вращенія. Выберемъ ось II , параллельную H и лежащую въ плоскости V .

Пусть эта ось пересекает Pv в некоторой точке M , которая при вращении плоскости P будет оставаться неподвижной.

После поворота горизонтальный след Ph плоскости должен расположиться перпендикулярно к OX . Для того, чтобы найти его положение, опустим из точки i перпендикуляр in на Ph . После поворота этот перпендикуляр совпадет с осью OX и точка n — с n_1 , при чем $ni = n_1i$. Точка N , и будет служить новой точкой схода следов повернутой плоскости P . Проводим через n_1 линию $Ph_1 \perp OX$ и соеди-



Черт. 146.



Черт. 147.

няем n_1 с m' . Линия n_1m' или Pv_1 будет вертикальным следом плоскости. Угол же α между Pv_1 и OX и будет искомым.

Разсмотрим теперь случай вращения плоскости, заданной не следами, как раньше, а пересекающимися линиями.

Пусть, например, (черт. 147) заданы проекции плоского треугольника ABC , и требуется определить угол наклона его к H .

Мы уже знаем, что угол наклона любой плоскости к H измеряется без искажения на V , если данная плоскость будет перпендикулярна к V .

Поэтому повернем плоскость треугольника ABC так, чтобы она расположилась перпендикулярно к V .

Проведем через точку C ось вращения II , перпендикулярную к плоскости H . Разматриваемую задачу можно было бы свести к предыдущей задаче, если бы был найден горизонтальный след плоскости ABC . Для определения угла поворота достаточно горизонтальный след

провести въ положеніе, перпендикулярное къ OX . Но, очевидно, вмѣсто самого горизонтальнаго слѣда достаточно знать только его направленіе. Чтобы найти это направленіе, воспользуемся горизонталью, которая, какъ извѣстно, параллельна горизонтальному слѣду. Пусть эта горизонталь будетъ BC ($dc, d'c'$). Будемъ вращать горизонталь вокругъ оси II , перпендикулярной къ H и проходящей черезъ точку C , до приведенія ея въ положеніе, перпендикулярное къ плоскости V . Для этого приведемъ dc съ положеніе d_1c_1 , перпендикулярное къ OX . Уголь поворота горизонтали a и опредѣлимъ тотъ уголь, на который надо повернуть всѣ точки плоскости ABC , чтобы она стала перпендикулярной къ плоскости V . Поворачивая точки a и c на этотъ уголь a и соединяя ихъ прямыми, опредѣлимъ искомое положеніе плоскости ABC . Дѣйствительно, вертикальныя проекціи a_1' и b_1' этихъ точекъ должны лежать съ одной стороны на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ a_1 и b_1 къ OX , а съ другой стороны на перпендикулярахъ $a_1'a_1'$, $b_1'b_1'$, опущенныхъ изъ точекъ a' и b' на ось $i'i'$. Въ пересѣченіи соответственныхъ перпендикуляровъ и найдемъ точки a_1' и b_1' .

Такъ какъ послѣ поворота плоскость ABC будетъ перпендикулярна къ V , то вертикальныя проекціи всѣхъ точекъ, лежащихъ въ ABC , должны находиться на новомъ вертикальномъ слѣдѣ Pv_1 , т. е. Pv_1 пройдетъ черезъ точки a_1' , c' и b_1' .

Уголь a между Pv_1 и OX и будетъ искомымъ.

в) Вращеніе пространственныхъ тѣлъ.

При вращеніи пространственнаго тѣла вокругъ какой-нибудь оси на нѣкоторый уголь a достаточно повернуть вершины или, вообще, точки, опредѣляющія форму тѣла, на тѣ же самые углы.

При этомъ необходимо помнить, что вращеніе всѣхъ точекъ слѣдуетъ производить въ одномъ и томъ же направленіи на одни и тѣ же углы, иначе нарушится взаимное расположеніе точекъ тѣла.

На чертежѣ 148 въ видѣ примѣра показано вращеніе пирамиды $SABC$ вокругъ оси $II \perp H$.

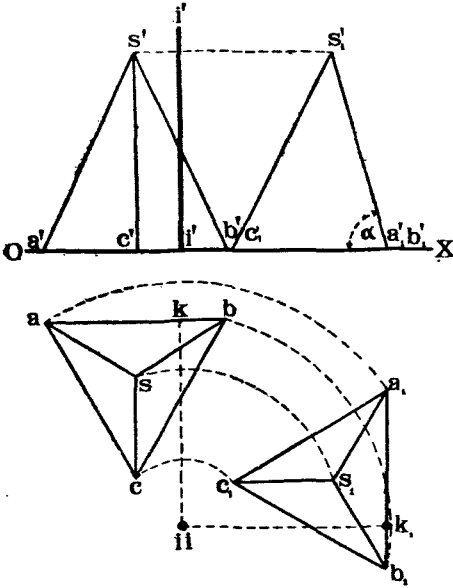
Пирамида вращается до тѣхъ поръ, пока ребро ея AB не сдѣлается перпендикулярнымъ къ V .

При этомъ линія ik , перпендикулярная къ AB , расположится параллельно OX . Послѣ такого поворота грани ABC и SAB , пересѣкающіяся по ребру AB , расположатся перпендикулярно къ V , и уголь a между ними спроектируется на V безъ искаженія, будучи равнымъ углу $s_1'a_1'c_1'$.

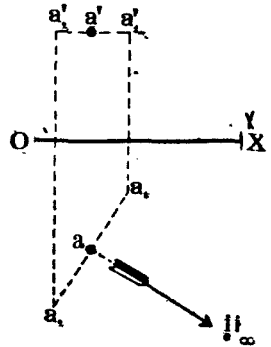
ε) Вращение вокруг бесконечно удаленной оси.

Если ось вращения II , оставаясь, например, перпендикулярной къ H , будетъ удалена отъ вращаемой точки на бесконечно большое разстояніе,

то радиусъ вращения точки будетъ бесконечно большимъ, и точка будетъ двигаться уже не по кругу, а по прямой линіи, перпендикулярной къ радиусу



Черт. 148.



Черт. 149.

и параллельной H . Иными словами, въ этомъ случаѣ вращеніе преобразуется въ прямолинейное движеніе точки, параллельное H (чертежъ 149).

Задача № 14.

На плоскости H лежатъ одною своею гранью трехгранная стеклянная призма 123456 (1'2'3'4'5'6').

Даны проекція $ab, a'b'$ свѣтового луча, расположеннаго въ плоскости перпендикулярной въ ребраъ призмы, и данъ показатель преломленія $\frac{3}{2}$. Требуется построить проекціи лучей: преломленнаго и выходящаго изъ призмы.

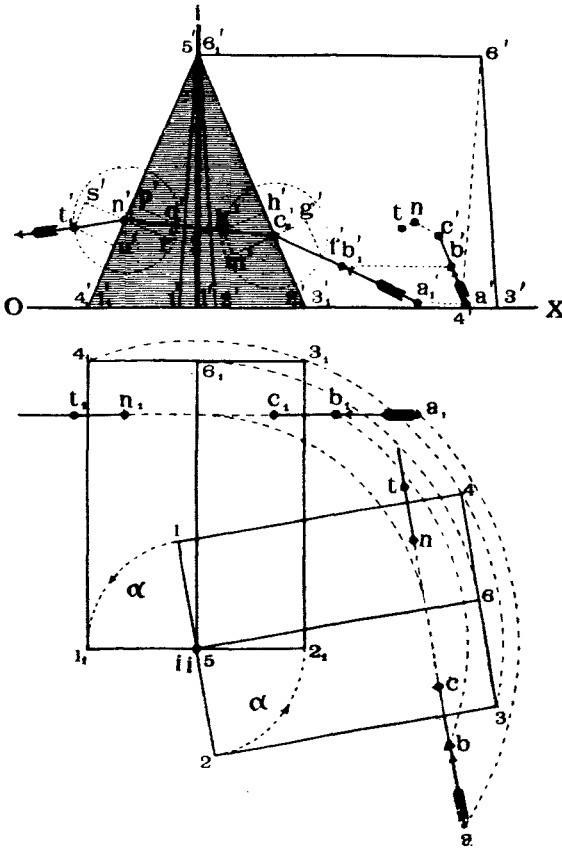
Рѣшеніе.

Такъ какъ всѣ построенія, относящіеся къ опредѣленію пути луча, будутъ располагаться въ плоскости, проходящей черезъ лучъ и перпендикулярной къ H и къ ребраъ призмы, то для того, чтобы эти построенія проектировались, хотя бы на V , безъ искаженія, повернемъ призму и лучъ такъ, чтобы ребра призмы расположились перпендикулярно къ H . Для этого за ось вращения выбираемъ линію II , проходящую черезъ вершину 6 призмы и перпендикулярную въ H . Послеъ поворота призмы и луча AB вокругъ этой оси на уголь α , призма расположится перпендикулярно къ V и займетъ положеніе $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1, 1'_1 2'_1 3'_1 4'_1 5'_1 6'_1$; проекціи же луча будутъ $o_1 b_1, a_1' b_1'$. Продолжая $a_1' b_1'$ до встрѣчи съ линіей $2_1 5_1$, найдемъ проекцію c_1' точки пересѣченія луча съ гранью 2356 призмы.

По закону Декарта лучъ падающій и лучъ преломленный составляютъ съ нор-

малю $m'g'$ углы, отношение синусовъ которыхъ равно показателю преломленія. Опишемъ изъ c_1' кругъ произвольнаго радиуса и замѣтимъ точку f' пересѣченія луча $a_1'b_1'$ съ этимъ кругомъ.

Пусть линія $m'g'$ перпендикулярна къ $5'2_1'$. Опустимъ изъ f' перпендикуляръ $f'g'$ на $m'g'$ и отложимъ $c_1'h' = \frac{3}{2} f'g'$.



Черт. 150.

Изъ h' проведемъ $h'k' \perp 5'2_1'$ до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ k' . Линія $c_1'k'$ и опредѣлитъ направленіе преломленнаго луча, такъ какъ

$$\frac{\sin f'c_1'g'}{\sin k'c_1'm'} = \frac{f'g'}{k'm'} = \frac{3}{2}.$$

Продолжая лучъ $c_1'k'$ до пересѣченія съ линіей $4_1'6_1'$, найдемъ проекцію n_1' точки N_1 выхода его изъ призмы. Направленіе выходящаго луча опредѣлимъ подобнымъ же образомъ, имѣя въ виду, что

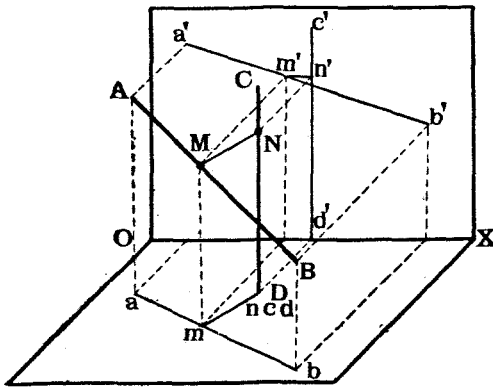
$$\frac{\sin qn_1'r'}{\sin t_1'n_1's'} = \frac{q'r'}{s't'} = \frac{2}{3}.$$

Найдя точки C, N и T при повернутомъ положеніи призмы, остается ихъ перенести на заданное положеніе призмы и луча, вращая эти точки вокругъ той же оси II , но въ обратную сторону на тѣ же углы α .

с) *Последовательное вращение вокруг двух осей, перпендикулярных къ плоскостямъ проекцій.*

При рѣшеніи различныхъ задачъ очень часто приходится опредѣлять истинную форму и размѣры фигуръ, расположенныхъ въ случайно заданной плоскости; равнымъ образомъ часто приходится случайно заданную прямую линію приводить въ положеніе, перпендикулярное къ H или къ V . Конечно, выбравъ соответственнымъ образомъ въ пространствѣ какую-нибудь линію и принявъ ее за ось вращенія, можно данный геометрическій элементъ привести въ требуемое наивыгоднѣйшее положеніе. Однако, при такомъ вращеніи дуги круговъ, описываемыхъ различными его точками, спроектируются на V и на H въ дуги эллипсовъ, построеніе которыхъ затруднительно. Поэтому вмѣсто одного поворота вокругъ случайно расположенной оси и вмѣсто построенія эллипсовъ предпочитаютъ дѣлать два послѣдовательныхъ поворота вокругъ двухъ осей, выбирая одну изъ этихъ осей, перпендикулярную къ H , а другую, перпендикулярную къ V .

Прослѣдимъ примѣненіе этого метода въ рѣшеніи слѣдующей задачи: «Даны двѣ прямыя линіи: AB и CD , не параллельныя и не пересѣкающіяся. Опредѣлить разстояніе между ними, и положеніе ближайшихъ точекъ».



Черт. 151.

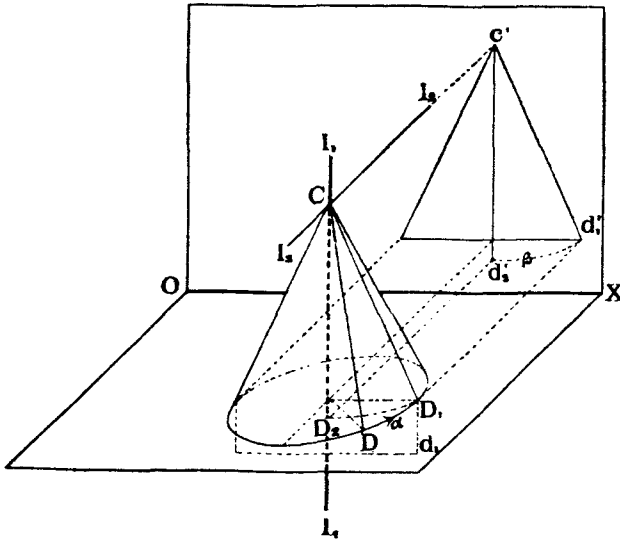
Предположимъ сначала, что прямыя линіи заданы не случайно, а такъ, что одна изъ нихъ, на примѣръ, CD (чертежъ 151) перпендикулярна къ H , и пусть точки M и N на прямыхъ являются ближайшими, иными словами, линія MN перпендикулярна къ AB и CD . При этомъ MN , будучи перпендикулярна къ CD , расположится параллельно H , прямой же уголъ между AD и MN на основаніи теоремы 9-й (стр. 33) спроектируется на H безъ искаженія, т. е. mn будетъ перпендикулярна ab . Поэтому, если CD будетъ перпендикулярна къ H , то положеніе ближайшихъ точекъ M и N можно опредѣлять слѣдующимъ образомъ: изъ горизонтальной проекціи cd линіи CD опускаемъ перпендикуляръ ct на ab и находимъ самую точку M на AB . Далѣе, изъ M проводимъ горизонтальную плоскость, которая пересѣчетъ CD во второй искомой точкѣ N .

Итакъ, для рѣшенія задачи слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы одна изъ данныхъ линій расположилась бы перпендикулярно къ H .

Этого легко достичь, пользуясь методомъ вращения.

Для этого проведемъ сначала черезъ точку C ось I_1I_1 , перпендикулярную къ H , и повернемъ прямую CD вокругъ этой оси до положенія CD_1 , параллельнаго V (черт. 152).

Далѣе, проведемъ черезъ ту же точку C вторую ось вращения I_2I_2 и повернемъ прямую CD_1 вокругъ этой оси до положенія, перпендикулярнаго къ H , которое и является выгоднымъ для рѣшенія задачи.



Черт. 152.

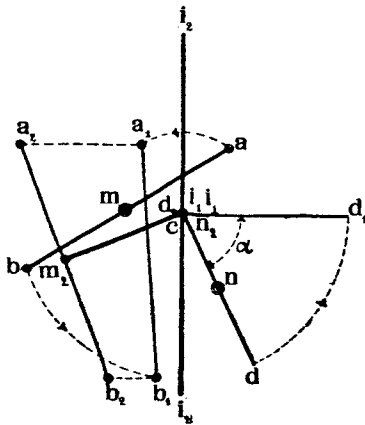
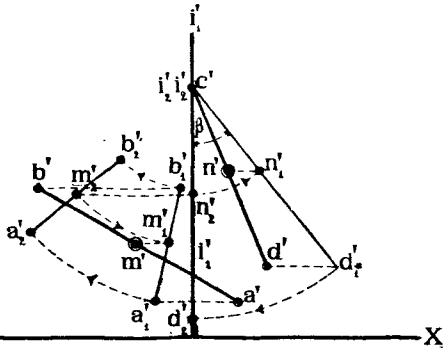
При рѣшеніи этой задачи въ проекціяхъ не слѣдуетъ забывать, что при послѣдовательныхъ поворотахъ прямой CD вокругъ двухъ осей необходимо вмѣстѣ съ CD вращать и другую прямую AD на тѣ же углы въ томъ же направленіи и вокругъ тѣхъ же осей, иначе нарушится взаимное расположеніе прямыхъ.

На черт. 153 эта задача рѣшена въ проекціяхъ. Первый поворотъ на уголь α сдѣланъ вокругъ оси $I_1I_1 \perp H$. Новыя проекціи прямыхъ будутъ a_1b_1 , $a_1'b_1'$ и cd_1 , $c'd_1'$. При этомъ прямая CD оказалась уже параллельной V .

Второй поворотъ сдѣланъ на уголь β вокругъ оси $I_2I_2 \perp V$. Послѣ поворота линия CD оказалась перпендикулярной къ H . Новыя проекціи прямыхъ: a_2b_2 , $a_2'b_2'$ и cd_2 , $c'd_2'$.

Проводимъ теперь изъ c перпендикуляръ къ a_2b_2 до пересѣченія съ a_2b_2 въ точкѣ m_2 , находимъ на $a_2'b_2'$ точку m_2' , и изъ m_2' проводимъ линію, параллельную OX , до пересѣченія съ $c'd_2'$ въ точкѣ n_2' . Точка n_2

совпадетъ съ c . Точки N и M и будутъ искомыми, при чемъ длина n, m , выражаетъ разстояніе между AD и CD .



Черт. 153.

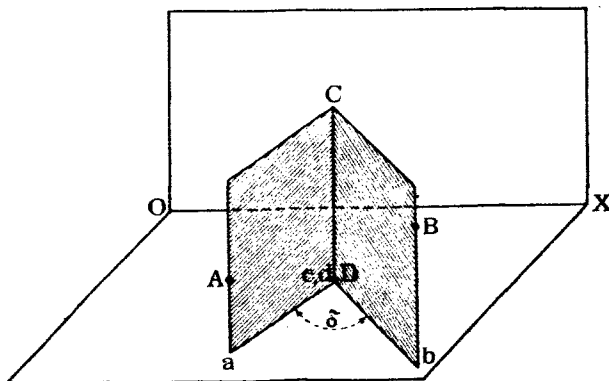
Вращая точки M и N вокругъ тѣхъ же осей на тѣ же углы, но въ обратную сторону, получимъ положенія ихъ m', n' и m, n на заданныхъ прямыхъ.

Рѣшимъ еще одну задачу въ видѣ примѣра на вращеніе вокругъ двухъ осей: «опредѣлить величину угла между двумя плоскостями».

Вспомнимъ, что величиной угла между двумя плоскостями или двуграннаго угла называется линейный уголъ между линиями, полученными отъ разсѣченія граней угла плоскостью, перпендикулярной къ его ребру.

Если бы (черт. 154) плоскости ACD и BCD были заданы такъ, что линия CD ихъ сѣченія была бы перпендикулярна къ H , то искомый уголъ спроектировался бы H безъ

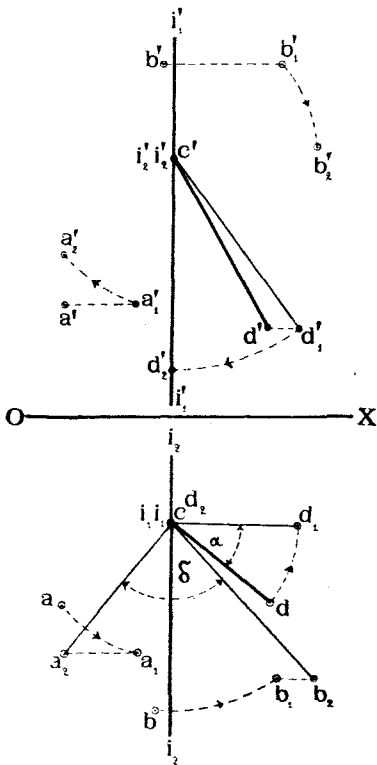
искаженія и былъ бы равенъ углу между линиями, соединяющими гори-



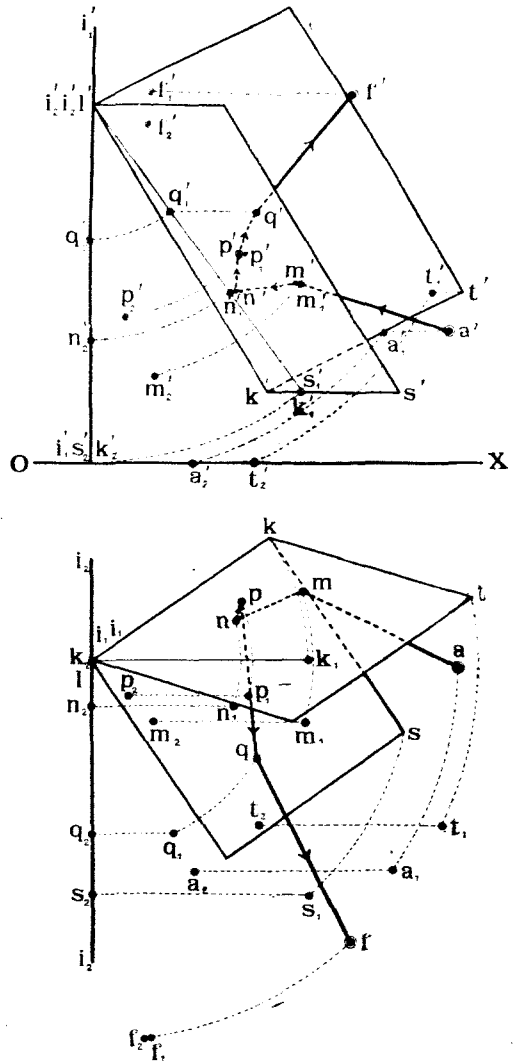
Черт. 154.

зонтальную проекцію cd ребра съ проекціями случайныхъ точекъ, на-
примѣръ, A и B , лежащихъ въ граняхъ угла.

Имѣя въ виду удобство измѣренія двуграннаго угла, когда его ребро
перпендикулярно къ H , приведемъ заданную систему именно къ такому
положенію. На черт. 155 даны
ребро двуграннаго угла CD и
по одной точкѣ A и B каждой
изъ его боковыхъ граней; какъ
и въ предыдущей задачѣ будемъ
вращать всю систему послѣдо-
вательно вокругъ двухъ осей,
перпендикулярныхъ къ плоско-
стямъ проекцій.



Черт. 155.



Черт. 156.

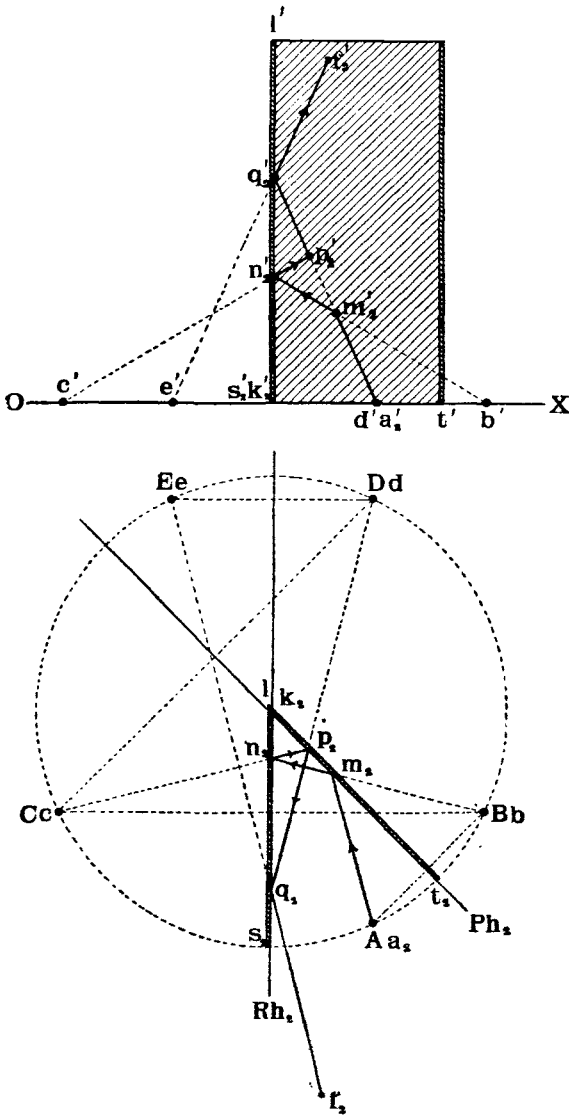
1-ое вращеніе вокругъ оси $I_1 I_1 \perp H$ на уголъ α . Послѣ поворота
 $CD \parallel V$. Новыя проекціи cd_1, cd_1', a_1, a_1' и b_1, b_1' .

2-ое вращеніе вокругъ оси $I_2 I_2 \perp V$ на уголъ β . Послѣ поворота
 $CD \perp H$. Новыя проекціи $cd_2, c'd_2', a_2, a_2', b_2, b_2'$.

Соединяя точку c съ a_2 и съ b_2 , получимъ искомый уголъ δ между прямыми ca_2 и cb_2 .

Задача № 15.

Даны въ пространствѣ два плоскихъ зеркала TKL и SKL , пересѣкающихся по линіи KL , и двѣ точки A и F внутри двуграннаго угла, образуемаго зеркалами



Черт. 157.

(черт. 156). Предполагая точку A свѣтящейся, построить проекціи свѣтового луча, который, выйдя изъ точки A и отразившись отъ важнаго зеркала по два раза, попадетъ бы въ точку F .

Рѣшеніе.

Для удобства построений, приведемъ заданную систему зеркалъ и точекъ послѣдовательнымъ вращеніемъ вокругъ двухъ осей $I_1I_1 \perp H$ и $I_2I_2 \perp V$ въ такое положеніе, чтобы ребро KL расположилось перпендикулярно къ H . Рѣшеніе такой задачи было объяснено ранѣе (стр. 78).

Послѣ второго поворота зеркала и точки займутъ положенія: $k_2l_2s_2$, $k_2'l_2s_2'$, k_2lt_2 , $k_2'l't_2'$, a_2a_2' , f_2f_2' (черт. 156).

Перенесемъ эти данныя на новый чертежъ (черт. 157), гдѣ зеркала и точки A и F обозначены тѣми же буквами, какъ и на черт. 156 послѣ второго поворота. При этомъ оказалось случайно, что точка A совпала съ H и зеркала наклонены другъ къ другу подъ угломъ въ 45° . (Уголъ между Ph_2 и Bh_2 равенъ 45°).

Лучъ, идущій изъ A и отражаемый сначала зеркаломъ P , представляется какъ бы исходящимъ изъ точки B , симметричной A относительно P . Этотъ новый лучъ, отражаясь зеркаломъ B , представляется какъ бы исходящимъ изъ точки C , симметричной съ B относительно зеркала R и т. д. Точки A, B, C, D, E , изъ которыхъ послѣдовательно какъ бы исходятъ отраженные лучи, лежатъ на окружности проходящей черезъ точку A съ центромъ въ точкѣ Ik_2 .

Окончательное направленіе луча будетъ FF_2 , при чемъ онъ пересѣкаетъ зеркало B въ точкѣ q_2, q_2' . Соединяя эту точку съ точкою D , получимъ предыдущее направленіе луча, пересѣкающее зеркало P въ точкѣ p_2, p_2' .

Далѣе, идя назадъ, найдемъ направленіе луча P_2C , пересѣкающее зеркало R въ точкѣ n_2, n_2' . Соединяя N_2 съ B , получимъ еще лучъ, пересѣкающій зеркало P въ точкѣ M_2 .

Наконецъ, соединяя M_2 съ A , получимъ начальное направленіе луча.

Такимъ образомъ полный путь луча въ пространствѣ будетъ $AM_2N_2P_2Q_2F_2$ и въ проекціяхъ: $a_2m_2n_2p_2q_2f_2$ и $a_2'm_2'n_2'p_2'q_2'f_2'$.

Можно было бы получить второе рѣшеніе, предполагая, что лучъ, выходящій изъ A , отражается сначала отъ зеркала R .

Опредѣливъ на чертежѣ 157 положеніе точекъ M_2, N_2, P_2 и Q_2 на зеркалахъ, остается ихъ привести къ заданному положенію зеркалъ и точекъ A и F , для чего полученныя четыре точки слѣдуетъ вращать въ обратную сторону вокругъ тѣхъ же осей I_1I_1 и I_2I_2 и на тѣ же углы, что и исполнено на черт. 156, на которомъ показаны проекціи луча $amprqf$ и $a'm'n'p'q'f'$ при заданномъ положеніи зеркалъ и точекъ A и F .

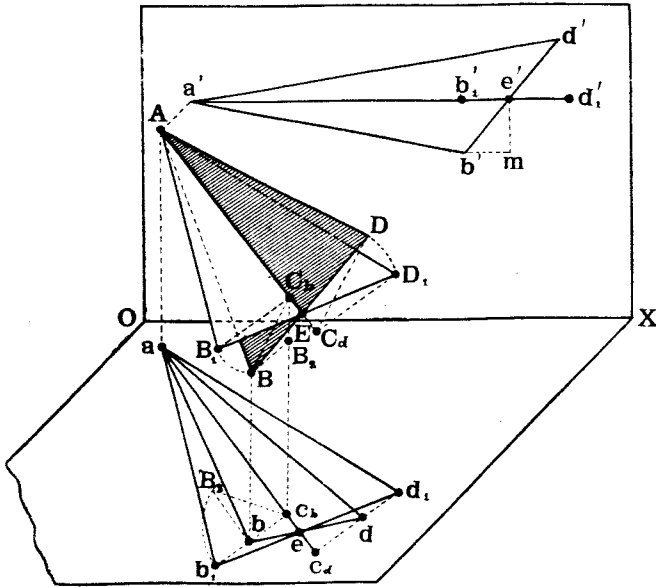
d) Вращеніе плоскости вокругъ ея горизонтали или фронталы.

Если геометрическіе элементы, величину которыхъ необходимо опредѣлить, лежатъ въ одной плоскости, то можно спроектировать ихъ безъ искаженія при помощи одного поворота плоскости, въ которой они лежатъ, вокругъ какой-нибудь горизонтали или фронталы этой плоскости. Вращая плоскость вокругъ горизонтали, можно повернуть плоскость въ положеніе, параллельное H , и, слѣдовательно, спроектировать всѣ находящіяся въ ней фигуры безъ искаженія на H .

Вращая же плоскость вокругъ фронталы, можно привести плоскость въ положеніе, параллельное V , и спроектировать всѣ лежащія въ ней фигуры безъ искаженія на V . Каждая точка плоскости, при вращеніи ея, вращаясь, вокругъ горизонтали, будетъ описывать въ пространствѣ кругъ, плоскость котораго будетъ перпендикулярной къ горизонтали.

Такой круг спроектируется на H въ прямую линію, перпендикулярную къ горизонтальной проекці горизонтали, на V же онъ спроектируется въ видѣ эллипса, построенія котораго однако возможно избѣжать.

Пусть, напримѣръ, данъ плоскій треугольникъ ABD (черт. 158). Проведемъ въ его плоскости черезъ точку A горизонталь AE и повернемъ треугольникъ вокругъ этой горизонтали такъ, чтобы онъ расположился параллельно H .



Черт. 158.

При вращеніи точки A и E треугольника, какъ лежація на оси вращенія, будутъ оставаться неподвижными.

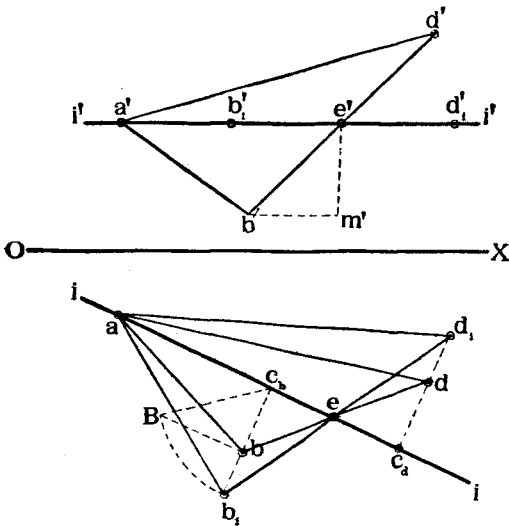
Точки же B и D будутъ описывать круги съ центрами въ C_1 и C_2 , лежащими на оси вращенія.

Кругъ вращенія точки D спроектируется на H въ прямую линію bc_2 , перпендикулярную къ ae , причемъ точка c_2 , пересѣченія этой линіи съ ae будетъ служить проекціей центра C_2 вращенія точки D .

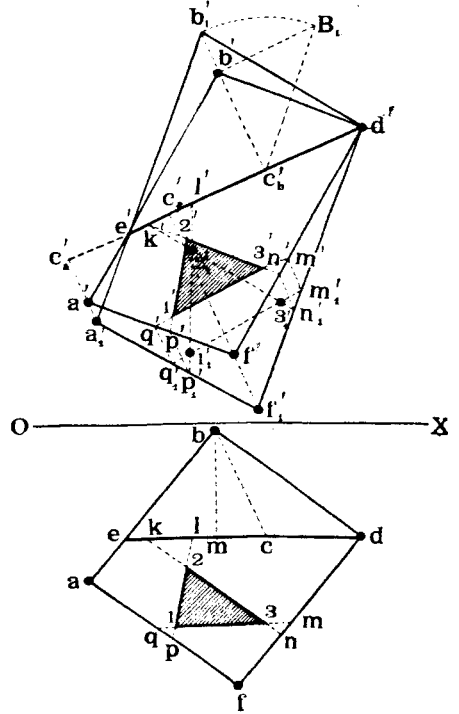
Подобнымъ же образомъ найдемъ, что кругъ вращенія точки B спроектируется на H въ прямую линію, перпендикулярную къ ae , и точка c_1 , пересѣченія этой линіи съ ae будетъ служить проекціей центра C_1 вращенія точки B .

При вращеніи точки B , горизонтальная проекція ея будетъ двигаться по линіи bc_1 . Когда плоскость ABV сдѣлается параллельной H , тогда радиусъ вращенія BC_1 спроектируется на H безъ искаженія. Величину

же этого радиуса нетрудно определить, например, на основании теоремы 4 (стр. 21). Для этого определяем разность возвышений точек B и C , над B . Эта разность равна отрезку $e'm$ —возвышению горизонтали над B . На стороне bc , как на катет, строим прямоугольный треугольник B_3bc , другой катет которого $B_3b = e'm$. Длина B_3c , гипотенузы и равна длине радиуса вращения точки B . Засѣкая линію bc , дугою радиуса B_3c , изъ центра c , получимъ проекцію b_1 точки B въ повернутомъ положеніи. Горизонтальная проекція стороны BED треугольника послѣ поворота займетъ положеніе b_1e .



Черт. 159.



Черт. 160.

Положеніе же точки d_1 опредѣлится изъ двухъ условий: съ одной стороны она должна лежать на линіи b_1e , а съ другой, при вращеніи точки B , ея горизонтальная проекція должна двигаться по линіи dc , перпендикулярной къ ae , иными словами точки d_1 опредѣляется пересѣченіемъ линій b_1e и dc .

Соединяя точки b_1 , d_1 и a другъ съ другомъ, получимъ горизонтальную проекцію треугольника ABB , опредѣляющую истинную фигуру послѣдняго, вертикальная же проекція треугольника послѣ поворота превращается въ прямую линію $a'b_1'd_1'$.

На черт. 159 всѣ описанныя построенія воспроизведены въ проекціяхъ.

Въ качествѣ примѣра примѣненія такого метода рѣшимъ слѣдующую задачу.

Данъ плоскій четырехугольникъ $ABBF$ (черт. 160). Построить въ его плоскости равносторонній треугольникъ, длина стороны котораго дана.

Планъ рѣшенія задачи будетъ слѣдующій: Повернемъ четырехугольникъ вокругъ его фронтали до положенія, параллельнаго V . При такомъ положеніи его построимъ въ немъ требуемый треугольникъ, который будетъ на V проектироваться безъ искаженія.

Затѣмъ данный четырехугольникъ съ построенной въ немъ фигурой повернемъ вокругъ той же оси обратно на тотъ же уголъ и найдемъ проекціи треугольника. На черт. 160 эта задача рѣшена въ проекціяхъ.

Данъ четырехугольникъ (параллелограммъ) $ABBF$. За ось вращенія принята фронталь BE . При вращеніи фигуры вертикальныя проекціи ея вершинъ будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ $d'e'$. Радиусъ вращенія точки B равенъ гипотенузѣ B_1c_1' прямоугольнаго треугольника, у котораго одинъ катетъ—проекція b_1c_1' , а другой $b_1B_1 = bm$. Откладывая $b_1c_1' = B_1c_1'$, получимъ проекцію повернутаго положенія точки B . Соединяя точки b_1' и d' , получимъ проекцію повернутой стороны BB , соединяя же b_1' и e' и продолжая $b_1'e'$ до пересѣченія съ $a_1c_1' \perp d'e'$, получимъ точку a_1' , проекцію повернутой точки A . Остается провести $a_1'f_1' \parallel b_1'd'$ и $d_1'f_1' \parallel b_1'a_1'$.

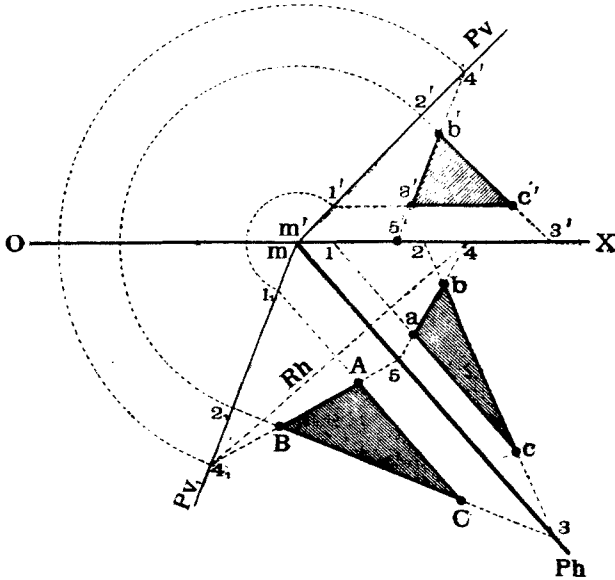
Фигура $a_1'b_1'd_1'f_1'$ даетъ намъ истинный видъ параллелограмма $ABBF$. Строимъ внутри него произвольно расположенный равносторонній треугольникъ $1_1'2_1'3_1'$, удовлетворяя лишь условно, чтобы сторона его равнялась данной длинѣ. Замѣчаемъ шесть точекъ $k_1', l_1', m_1', n_1', q_1', p_1'$ пересѣченія сторонъ его со сторонами четырехугольника $a_1'b_1'd_1'f_1'$. Будемъ теперь вращать четырехугольникъ обратно. Четыре изъ упомянутыхъ точекъ q_1', p_1', m_1', n_1' при этомъ будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ $d'e'$. Замѣчаемъ точки q', p', m', n' , пересѣченія этихъ линій со сторонами первоначальнаго четырехугольника.

Точки же k', l' , какъ лежація на проекціи оси вращенія, во время обратнаго вращенія будутъ оставаться неподвижными. Соединяя теперь попарно полученныя шесть точекъ линіями $k'n', l'p', q'm'$, получимъ въ точкахъ пересѣченія этихъ линій вертикальныя проекціи вершинъ $1', 2', 3'$ искомага треугольника.

Найдя горизонтальныя проекціи k, l, m, n, p, q точекъ K, L, M, N, P и Q и попарно соединивъ ихъ, получимъ горизонтальныя проекціи $1, 2, 3$ вершинъ треугольника. Проекціи искомага треугольника на чертежѣ заштрихованы.

е) Совмещение.

Методъ совмѣщенія является частнымъ случаемъ вращенія плоскостей вокругъ ихъ горизонталей или фронталей, именно, за ось вращенія принимается не случайная горизонталь или фронталь плоскости, а горизонтальный или вертикальный слѣдъ плоскости. При такихъ условіяхъ плоскость послѣ поворота совпадетъ или совмѣстится съ плоскостью H , если вращеніе происходило вокругъ горизонтального слѣда, или съ плоскостью V , если вращеніе происходило вокругъ вертикального слѣда.



Черт. 161.

Методъ совмѣщенія примѣняется тогда, когда требуется опредѣлить истинный видъ фигуръ, лежащихъ въ какой-нибудь плоскости, или въ этой плоскости требуется построить фигуру, форма и размѣры которой даны. При этомъ предполагается, что хотя бы одинъ изъ слѣдовъ плоскости, вокругъ котораго можно было бы совмѣстить данную плоскость съ плоскостью проекцій, лежитъ въ предѣлахъ чертежа.

Пусть, напримѣръ, на черт. 161 дана плоскость P , въ которой лежитъ треугольникъ ABC . Требуется опредѣлить истинную фигуру этого треугольника.

Если мы совмѣстимъ плоскость P вмѣстѣ съ лежащимъ въ ней треугольникомъ съ плоскостью H , то тогда на H фигура треугольника будетъ проектироваться безъ искаженія.

Принимаемъ за ось вращенія слѣдъ Ph . Продолжимъ стороны треугольника до пересѣченія со слѣдами плоскости въ точкахъ 1, 2, 3, 4, 5.

Найдемъ совмѣщенное положеніе слѣда Pv . Точка схода M во все время поворота будетъ оставаться неподвижной, такъ какъ она лежитъ на оси вращенія. Слѣдовательно, послѣ поворота совмѣщенный вертикальный слѣдъ долженъ пройти опять черезъ нее. Найдемъ повернутое положеніе какой-нибудь точки, напримѣръ, **4** этого слѣда.

При вращеніи вокругъ Ph точка **4** будетъ двигаться въ плоскости B , перпендикулярной къ Ph . Горизонтальная проекція **4** этой точки будетъ двигаться вдоль горизонтальнаго слѣда Rh , который долженъ проходить черезъ точку **4** и долженъ быть перпендикулярнымъ къ Ph . Когда послѣ поворота точка **4** совпадетъ съ H , на эту же плоскость спроектируется безъ искаженія динія $M4$, истинная длина которой равна отрѣзку $m'4'$. Такимъ образомъ совмѣщенное положеніе **4**, точки **4** опредѣлится какъ точка пересѣченія двухъ линій: 44_1 , перпендикулярной къ Ph , и дуги круга, описаннаго изъ точки mm' радіусомъ $m'4'$.

Соединяя точки **4**, съ mm' , получимъ совмѣщенное положеніе Pv , слѣда Pv .

Описывая изъ центра mm' дуги радіусовъ $m'1'$ и $m'2'$ до пересѣченія съ Pv , получимъ совмѣщенные положенія 1, 2, точекъ 1 и 2.

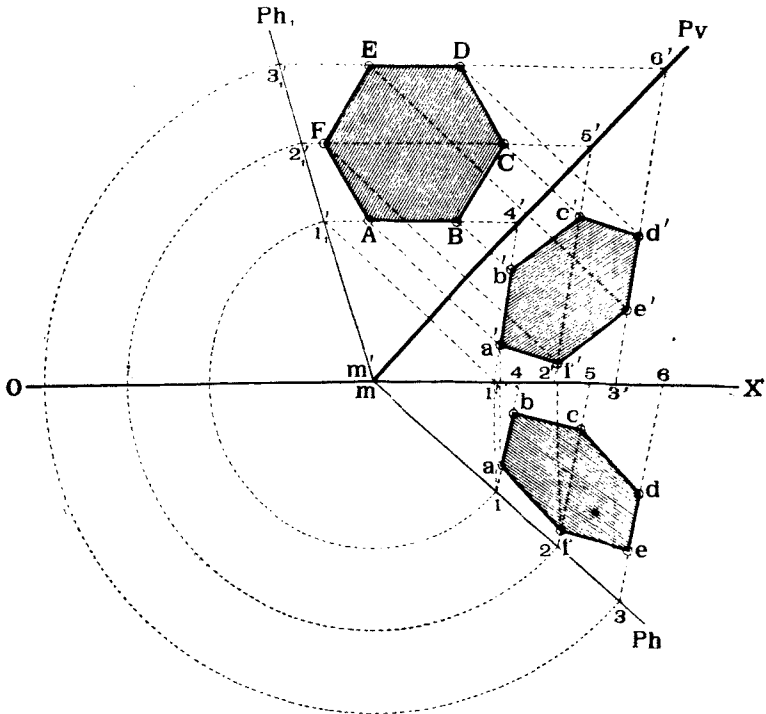
Такъ какъ точки 3 и 5, лежація на слѣдѣ Ph , при вращеніи остаются неподвижными, то соединяя ихъ соотвѣтственно съ точками 2, и 4, получимъ совмѣщенные положенія линій **23** и **45**. Пересѣченіе этихъ линій другъ съ другомъ даетъ совмѣщенное положеніе вершины B треугольника.

На черт. 161 сторона AC треугольника случайно задана параллельной Ph . Поэтому и при совмѣщеніи P съ H эта сторона, проходя черезъ точку 1, расположится параллельно Ph и пересѣчетъ двѣ другія линіи 4,5 и 2,3 въ точкахъ A и C , опредѣляющія совмѣщенные положенія двухъ другихъ вершинъ треугольника, истинная фигура котораго будетъ ABC .

Рѣшимъ еще такую задачу (черт. 162): Дана плоскость P . Требуется построить въ ней правильный ѳестиугольникъ, длина стороны котораго известна.

Для рѣшенія этой задачи совмѣстимъ P съ V , вращая P вокругъ Pv . Найдемъ совмѣщенное положеніе слѣда Ph такъ же, какъ находили въ предыдущей задачѣ слѣдъ Pv . Какая-нибудь точка 1, 1' слѣда Ph при вращеніи P будетъ описывать въ пространствѣ кругъ, плоскость котораго будетъ перпендикулярна къ V и къ Pv . Вертикальная проекція 1' будетъ, при вращеніи точки **1** двигаться по линіи 1'1'_1, перпендикуляр-

ной къ Pv . Когда же Pv совмѣстится съ V , длина отрѣзка отъ точки схода M до точки 1 , равная $m1$, будетъ на V проектироваться безъ искаженія. Поэтому точка $1_1'$ опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ линій: $1'1_1'$, перпендикулярной къ Pv , и дуги круга, описаннаго изъ точки mm' , какъ изъ центра, радиусомъ $m1$. Соединяя точки m' и $1_1'$, получимъ линію Ph_1 , совмѣщенной съ V слѣдъ Ph .



Черт. 162.

Строимъ теперь внутри угла между Pv и Ph_1 правильный шестиугольникъ $ABCDEF$ по данной его сторонѣ, при чемъ, для простоты построений, предполагаемъ, что продолженіе одной изъ сторонъ его AB проходить черезъ точку $1_1'$.

Продолжаемъ линіи AB , BE и CF до пересѣченія съ линіями Pv и Ph_1 въ точкахъ $1_1'4'$, $2_1'5'$ и $3_1'6'$.

При обратномъ вращеніи плоскости P точки $4'$, $5'$, $6'$, какъ лежащія на оси вращенія, останутся неподвижными. Точки же $2_1'$ и $3_1'$, какъ лежащія на Ph_1 , расположатся на Ph въ разстояніяхъ $m2 = m'2_1'$ и $m3 = m'3_1'$.

Находимъ вертикальныя проекціи $1'$, $2'$, $3'$ точекъ **1**, **2**, **3** и горизонтальныя проекціи **4**, **5**, **6** точекъ **4**, **5**, **6** и строимъ проекціи линій **14**, **25**, **36**, на которыхъ лежатъ вершины шестиугольника.

При вращении послѣдняго вокруг Pv , каждая его вершина будет описывать кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ Pv . Вертикальныя проекціи вершинъ будутъ двигаться по линиямъ, проходящимъ соответственно черезъ точки $A, B, C...$ и перпендикулярнымъ къ Pv .

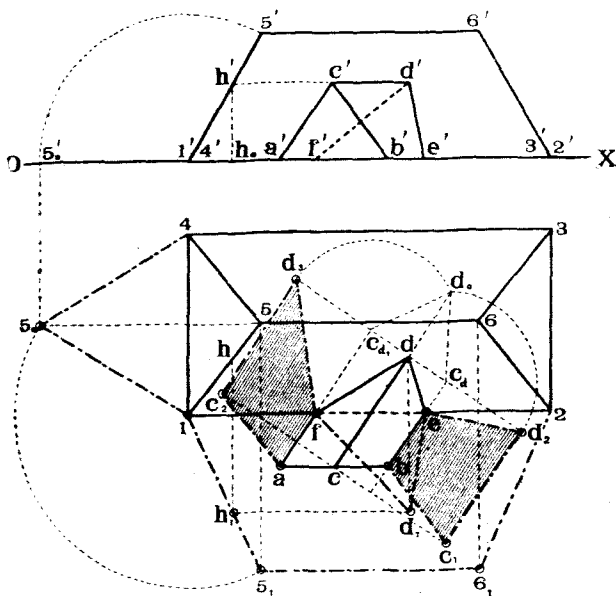
Находя пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ вертикальными проекціями линій $1'4', 2'5'$ и $3'6'$, на которыхъ должны лежать соответственныя вершины, получимъ точки a', b', c', d', e', f' ; опуская же изъ нихъ перпендикуляры къ OX до пересѣченія съ линиями 14, 25, 36, найдемъ и горизонтальныя проекціи вершинъ нестиугольника.

Задача № 16.

На черт. 163 даны проевціи двухъ пересѣкающихся между собою по линіямъ ED и FD крышъ: 123456 и $ABEEDC$. Опреѣлнить истинную фигуру каждой грани крыши.

Рѣшеніе.

Опреѣлимъ сначала форму граней большой крыши, имѣя при этомъ въ виду, что грани 145 и 1265 соответственно одинаковы съ гранями 236 и 3456.



Черт. 163.

Для определѣнія истинной фигуры грани 145 совмѣстимъ ее съ H , вращая ее навѣво вокругъ слѣда 14, перпендикулярнаго къ V . При этомъ точка 5 этой грани опишетъ въ пространствѣ кругъ, проектирующійся на V безъ искаженія. Совмѣщенное положеніе 5_0 , точки 5 определится, какъ пересѣченіе двухъ япій: $5_0 \perp 14$ и $5_0 5_0 \perp OX$, при чемъ $5_0 1' = 1' 5'$.

Треугольникъ 145₀ и является истинной фигурой грани 145.

Для определѣнія истиннаго вида грани 1265 совмѣщаемъ ее съ H , вращая вокругъ 12. При этомъ точки 5 и 6 будутъ двигаться по линіямъ 55₁ и 66₁, перпендикулярнымъ къ V .

дикулярнымъ къ 12. Послѣ же совмѣщенія длина реберъ 15 и 26 должна проектироваться на H безъ искаженія. Но длина этихъ реберъ равна отряду 15_0 .

Засѣкая пинию 55_1 дугою изъ центра 1 радиуса 15_0 , получимъ совмѣщенное положеніе 5_1 точки 5. Линія 56_1 пойдетъ параллельно 12 до пересѣченія съ 66_1 въ точкѣ 6_1 .

Трапеція $126,5_1$ и будетъ являться истинной фигурой грани 1256. Найдемъ на ней истинный видъ треугольника FDE примыканія малой крыши.

Проведемъ въ грани 1256 черезъ точку D горизонталь, которая пересѣчетъ ребро 15 въ точкѣ h' , b . При совмѣщеніи точка H займетъ положеніе h_1 , а горизонталь пойдетъ по линіи h_1d_1 параллельной 12. Точка пересѣченія h_1d_1 съ $dd_1 \perp 12$ и опредѣлитъ совмѣщенное положеніе d_1 точки D . Соединяя d_1 съ f и e , получимъ истинный видъ fd_1e треугольника FD_1E примыканія малой крыши къ большой.

Построимъ теперь истинныя фигуры боковыхъ граней малой крыши.

Совмѣстимъ грань $BEDC$ съ H , вращая ее вокругъ be . При этомъ точки d и c будутъ двигаться по линіямъ перпендикулярнымъ къ be . Центромъ вращенія точки d будетъ c_d . Величина радиуса вращенія точки d равна гипотенузѣ d_0c_d треугольника dd_0c_d , у котораго катетъ $dd_0 = hh_0 =$ возвышенію точки D надъ центромъ C_d . Откладывая $c_d d_2 = d_0 c_d$, получимъ совмѣщенное съ H положеніе d_2 точки d . Положеніе точки c_1 опредѣлится, какъ пересѣченіе линій $cc_1 \perp be$ и $d_2c_1 \parallel be$. Фигура bed_2c_1 даетъ истинный видъ грани $BEDC$.

Истинный видъ грани $AEDC$ опредѣляемъ подобнымъ же образомъ, для чего проводимъ $dd_3 \perp af$ и откладываемъ $c_d d_3 = c_d d_c$. Далѣе проводимъ $d_3c_2 \parallel af$ до пересѣченія съ $cc_2 \perp af$. Фигура afd_3c_2 и будетъ искомой.

§ 11. Перемѣна плоскостей проекцій.

а) *Общая початія.*

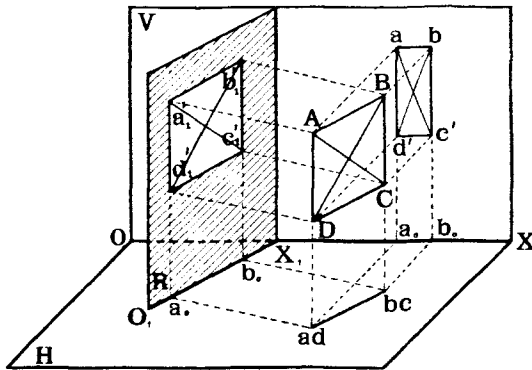
При пользованіи методомъ вращенія фигуръ, мы предполагали, что плоскости проекцій находятся въ неизмѣнномъ положеніи. Для того же, чтобы фигура проектировалась на одну изъ этихъ плоскостей безъ искаженія, мы вращали самую фигуру.

Однако, того же самаго результата мы могли бы достигъ, не двигая фигуры, а мѣняя плоскости проекцій такъ, чтобы данная фигура проектировалась на новую плоскость проекцій безъ искаженія.

Напримѣръ, на чертежѣ 164, показанъ квадратъ $AROD$, плоскость котораго перпендикулярна къ H , но не параллельна V . Поэтому квадратъ проектируется на V съ искаженіемъ. Если же мы спроектируемъ его на плоскость R , параллельную плоскости квадрата, то на эту плоскость квадратъ будетъ уже проектироваться безъ искаженія.

При замѣнѣ одной изъ старыхъ плоскостей проекцій новою, необходимо послѣднюю выбирать перпендикулярной къ оставляемой старой плоскости проекцій, напримѣръ (черт. 164), при замѣнѣ плоскости V новой R , послѣдняя должна быть перпендикулярна къ H . Этого правила необходимо придерживаться потому, что тогда и для новой пары плоскостей проекцій (H и R) сохранятся въ силѣ всѣ теоремы и выводы, которые были приведены ранѣе.

Линія свѣченія новой плоскости проекцій съ оставляемой старой называется *новой осью проекцій* и обозначается буквами O_1X_1 , причемъ если эта ось одна, и получилась при замѣнѣ одной изъ старыхъ пло-



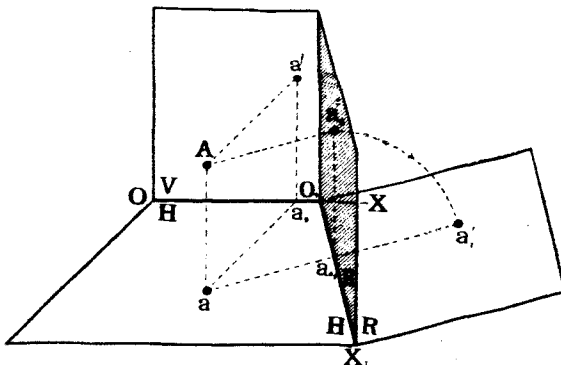
Черт. 164.

скостей V или H проекцій новою, то внизу буквъ ставятся цифра 1. Если же приходится кромѣ V мѣнять еще и H , то вторую ось обозначаютъ буквами O_2X_2 и т. д.

Разсмотримъ сначала рядъ случаевъ, когда приходится мѣнять одну плоскость проекцій, а затѣмъ перейдемъ и къ случаю перемѣны обѣихъ плоскостей проекцій.

b) *Перемѣна одной плоскости проекцій.*

Пусть дана въ пространствѣ точка A (черт. 165) и показаны ея ортогональныя проекціи a' и a на плоскости V и H .



Черт. 165.

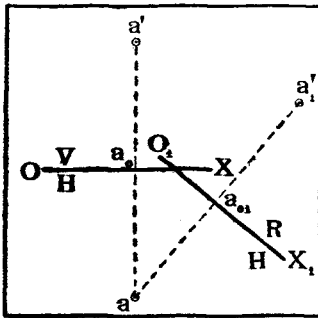
Проведемъ новую плоскость проекцій R , перпендикулярную H , и замѣняющую V , и пусть проекціей точки A на R будетъ точка a_1 . Не-

трудно видѣть, что разстояніе новой вертикальной проекціи a_1' точки A на R отъ новой оси O_1X_1 равно разстоянію старой вертикальной проекціи a' отъ старой оси OX , т. е. $a_1'a_{01}' = a'a_0$.

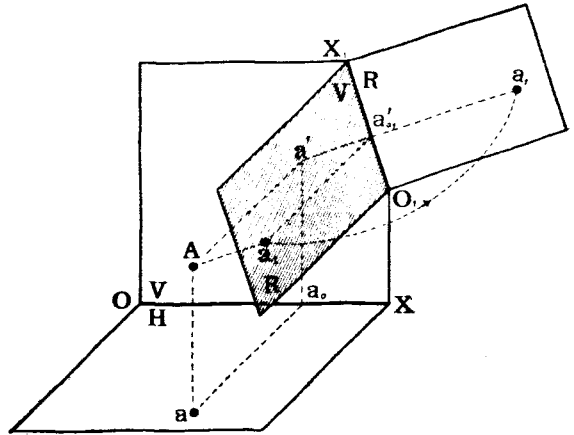
Плоскость R называется *новой вертикальной плоскостью проекцій*, а точка a_1' называется *новой вертикальной проекціей точки A* . Обозначается эта точка малой буквой того же наименованія съ двумя значками справа—внизу и вверху.

При разстановкѣ буквъ, обозначающихъ новую ось, будемъ придерживаться слѣдующаго правила:

Предположимъ, что на передней полѣ H слѣва стоитъ зритель и смотритъ на верхнюю полу R ; тогда лѣвый конецъ оси долженъ быть обозначенъ буквою O_1 , а правый— X_1 . Откинемъ теперь верхнюю полу по направленію отъ зрителя, т. е. вправо назадъ до совпаденія съ H . Тогда, по свойству ортогональныхъ проекцій, точка a_1' упадетъ на H и расположится на линіи aa_1' перпендикулярной къ O_1X_1 , при чемъ разстояніе $a_{01}a_1'$ останется равнымъ a_0a' . На черт. 166 тѣ же построения показаны въ проекціяхъ.



Черт. 166.



Черт. 167.

На чертежѣ 167 показанъ случай замѣны H плоскостью R , перпендикулярной къ V . Плоскость R называется *новой горизонтальной плоскостью проекцій*.

Проекціей точки A на эту плоскость будетъ точка a_1 , которая называется *новой горизонтальной проекціей точки A* и обозначается малой буквой того же наименованія со значкомъ справа внизу. Совмѣстимъ теперь R съ V , вращая R вправо вокругъ линіи сѣченія R съ V . Предполагая опять, что зритель стоитъ на передней полѣ новой горизонтальной плоскости R , находится въ томъ же углу, гдѣ и точка A и смотритъ на V , мы обозначимъ новую ось буквами O_1X_1 при чемъ O_1 расположимъ, какъ и раньше, слѣва отъ зрителя, а X_1 —справа.

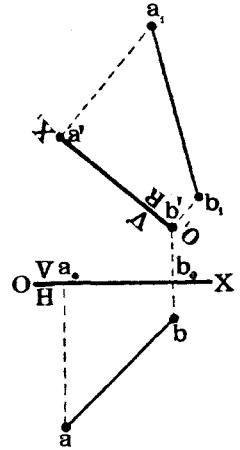
концы новой оси измѣнили свое расположеніе, слѣва O_1 , справа X_1 . Это показываетъ, что верхняя пола R отбрасывается всегда отъ зрителя, стоящаго на H .

На черт. 171 та же задача рѣшена замѣной плоскости H новой горизонтальной R , причѣмъ передняя пола плоскости R откинута вправо. Зритель, который предполагается всегда стоящимъ на передней полѣ, увидитъ слѣва отъ себя конецъ оси O_1 , а справа— X_1 . Такъ какъ точки A и R въ системѣ $\frac{V}{H}$ располагаются передъ V , то въ системѣ $\frac{V}{R}$ онѣ спроектируются на переднюю полу R , т. е. расположатся справа отъ O_1X_1 , какъ показано на черт. 171, причѣмъ

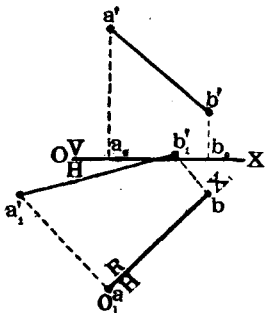
$$a'a_1 = a_0a; \quad b'b_1 = b_0b.$$

На черт. 172 опять рѣшена та же задача, причѣмъ передняя пола плоскости R

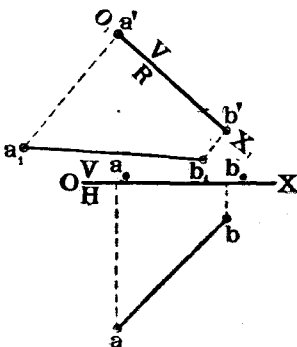
откинута влѣво. Поэтому, для зрителя, стоящаго на этой полѣ, лѣвый конецъ новой оси будетъ обозначенъ буквой O_1 , а правый—буквою X_1 . Новыя горизонтальныя проекціи a_1b_1 точекъ расположатся теперь слѣва, какъ и показано на чертежѣ.



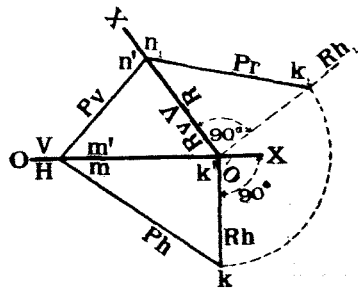
Черт. 171.



Черт. 170.



Черт. 172.



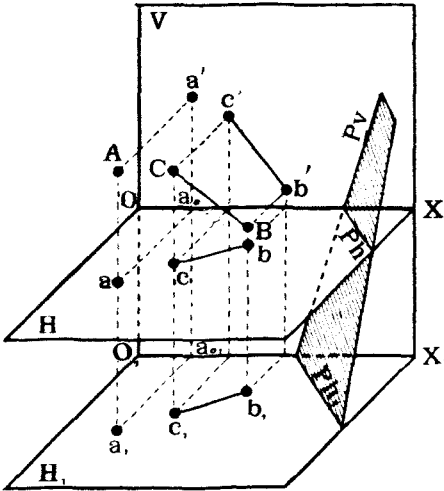
Черт. 173.

Предположимъ теперь (черт. 173), что дана плоскость P ея слѣдами въ системѣ $\frac{V}{H}$. Замѣнимъ плоскость H новой горизонтальной плоскостью R , перпендикулярной къ V , и построимъ слѣды плоскости P въ системѣ $\frac{V}{R}$, при чемъ переднюю полу плоскости R откинѣмъ вправо.

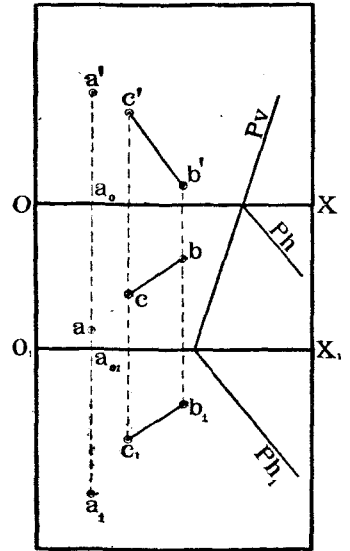
Новою точкою схода слѣдовъ будетъ служить точка n' , n_1 пересѣченія слѣда Pv съ новою осью O_1X_1 .

Для нахождения новаго горизонтальнаго слѣда плоскости P достаточно найти хотя бы еще одну его точку. Таковою можетъ служить точка $K(k, k')$ пересѣченія слѣдовъ Ph и Rh , какъ завѣдомо принадлежащая обѣимъ плоскостямъ P и R . Въ пространствѣ слѣдъ Rh перпендикуляренъ къ Rv , такъ какъ $R \perp V$. Послѣ совмѣщенія R съ V , слѣдъ Rh найдемъ по линіи Rh_1 , перпендикулярной къ Rv , и точка k придетъ въ точку k_1' , причемъ $k'k = k_1k'$.

Соединяя k_1 съ n_1 , найдемъ искомый новый горизонтальный слѣдъ Pv плоскости P на плоскости R въ системѣ $\frac{V}{R}$.

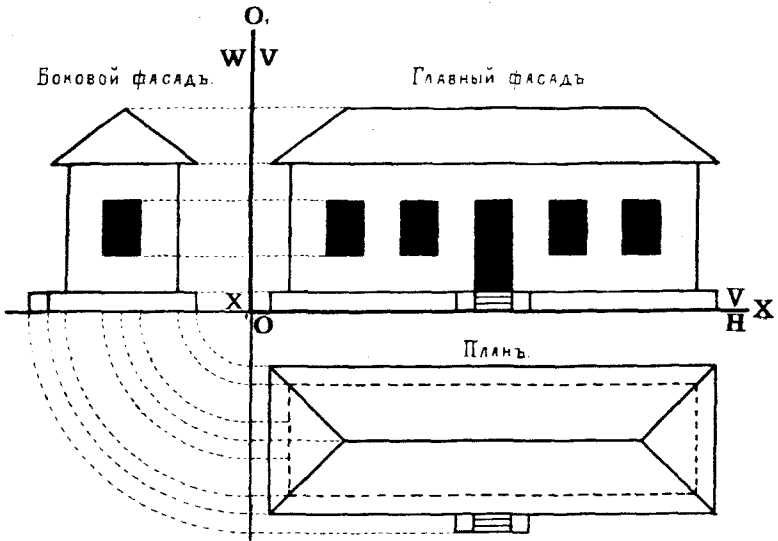


Черт. 174.



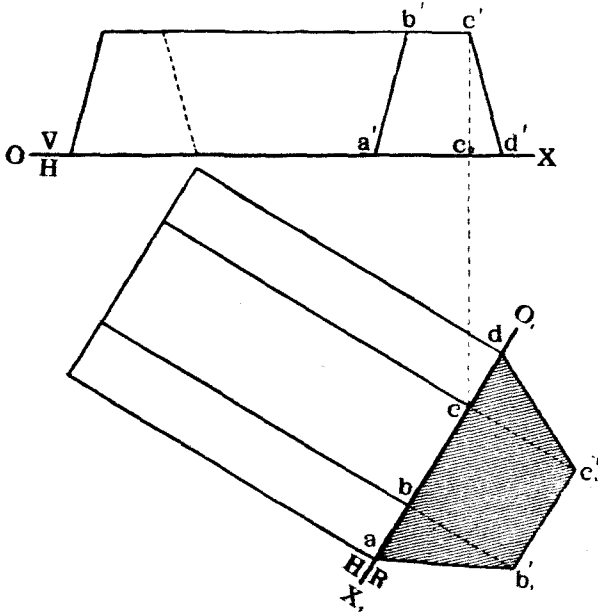
Черт. 175.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, при перемѣнѣ плоскости проекцій, бываетъ выгодно новую плоскость проекцій расположить параллельно старой. Напримѣръ, на чертежѣ 174 проведена новая горизонтальная плоскость проекцій H_1 параллельно H , и показаны новыя горизонтальныя проекціи точки A , прямой RC и новый горизонтальный слѣдъ плоскости P . При такой замѣнѣ всѣ горизонтальныя проекціи точекъ отодвигаются отъ старой оси на величину разстоянія новой плоскости H_1 отъ старой H . Такая перемѣна плоскости проекцій иногда бываетъ полезна, если горизонтальная, и вертикальная проекціи какого-нибудь предмета налегаютъ одна на другую, и желательно для наглядности изображенія отодвинуть ихъ другъ отъ друга. На чертежѣ 175 показаны въ проекціяхъ тѣ построенія, которыя на черт. 174 изображены въ пространствѣ.



Черт. 176.

Аналогичныя построения получатся, если плоскость V замѣнить ей параллельною.



Черт. 177.

На практикѣ часто пользуются методомъ перемѣны плоскостей проекцій для изображенія боковыхъ видовъ или профилей разныхъ предме-
Н. Рыжковъ.

товъ. Напримѣръ, на черт. 176 показаны проекціи дома на V и H или, какъ ихъ называютъ, главный фасадъ и планъ. Проектируя же домъ на профильную плоскость W , перпендикулярную и къ V и къ H , получимъ на W изображеніе бокового фасада дому. Плоскость W совмѣщаемъ съ V , вращая ее вокругъ ея вертикальнаго слѣда, который будетъ служить новой осью проекціи O_1X_1 .

Задача № 17.

На чертежѣ 177 изображена часть насыпи желѣзнодорожнаго полотна, ось котораго параллельна H . Определить профиль, т. е. фигуру нормальнаго сѣченія насыпи.

Рѣшеніе. Мѣняемъ плоскость проекцій V на новую R , которую выбираемъ перпендикулярно къ H и къ оси полотна. Тогда на эту плоскость профиль насыпи спроектируется безъ искаженія. Откидываемъ верхнюю полу R вправо, обозначая новую ось буквами O_1X_1 , или символомъ $\frac{R}{H}$. Проектируемъ точки A, B, C, D профиля на R , откладывая

$$bb'_1 = cc'_1 = ee'_1.$$

Соединяя между собою полученныя точки, получимъ искомый профиль $ab_1c_1d_1$.

с) *Перемѣна двухъ плоскостей проекцій.*

Иногда, при опредѣленіи истинной величины какого-нибудь геометрическаго элемента или для полученія нагляднаго изображенія предмета бываетъ необходимо перемѣнить не одну плоскость проекцій, а двѣ.

Въ этомъ случаѣ перемѣна производится послѣдовательно, сначала замѣняютъ одну изъ старыхъ плоскостей проекцій, напримѣръ, V , новой R , перпендикулярной къ оставляемой старой, т. е. къ H . Затѣмъ мѣняютъ вторую старую плоскость проекцій, въ данномъ случаѣ H , на новую, перпендикулярную къ R .

Выборъ новыхъ плоскостей проекцій опредѣляется требованіями задачи и условіемъ, чтобы каждая послѣдующая плоскость проекцій была перпендикулярна къ одной изъ предыдущихъ.

Разсмотримъ, какъ располагаются и опредѣляются проекціи точки при перемѣнѣ двухъ плоскостей проекціи.

Пусть дана точка A и показаны ея проекціи a и a' въ системѣ $\frac{V}{H}$ (черт. 178).

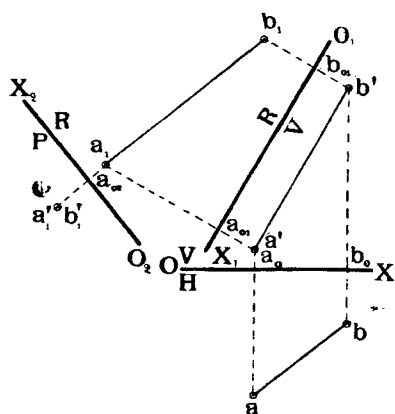
Замѣнимъ плоскость V новой вертикальной R , перпендикулярной къ H , и пусть проекція точки A на R будетъ a_1' .

Очевидно

$$a_{01} a_1' = Aa = aa'.$$

Проведемъ теперь плоскость P , перпендикулярную къ R , и примемъ ее за новую горизонтальную плоскость, замѣняющую H . Пусть проекція точки A на плоскость P будетъ a_1 .

линия будет служить второю осью. Проводимъ $cc_1' \perp O_1X_1$ и откладываемъ $cc_1' = cc'$. Линія bc_1' и будетъ второю осью проекцій. Откидываемъ переднюю полу P вверхъ. При такихъ условіяхъ зритель, стоящій на этой полѣ увидитъ слѣва отъ себя конецъ O_2 оси, а справа X_2 . Новая горизонтальная проекція точки A будетъ лежать на перпендикулярѣ къ O_2X_2 , опущенномъ изъ a_1' . Такъ какъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ точка A лежала



Черт. 180.

передъ R , то, слѣдовательно, она спроектируется на переднюю полу P , которая нами откинута вверхъ.

Поэтому новая горизонтальная проекція a_1 расположится сверху оси O_2X_2 и въ разстояніи отъ нея $a_{02}a_1$ равномъ aa_{01} , т. е. разстоянію точки A до R .

Разсмотримъ примѣненіе этого метода на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Дана прямая AR (черт. 180). Перемѣнить плоскости проекцій такъ, чтобы она спроектировалась въ точку.

Для рѣшенія задачи мѣняемъ плоскости проекцій слѣдующимъ образомъ:

отъ системы $\frac{V}{H}$ переходимъ къ системѣ $\frac{V}{R}$, при чемъ R выбираемъ перпендикулярно къ V и параллельно AR . Строимъ новую горизонтальную проекцію a_1b_1 прямой, откидывая переднюю полу R влѣво и откладывая $b_{01}b_1 = bb_0$ и $a_{01}a_1 = aa_0$. Отъ системы $\frac{V}{R}$ переходимъ къ системѣ $\frac{R}{P}$, при чемъ P выбираемъ перпендикулярно къ R и AR . При такихъ условіяхъ прямая AR спроектируется на P въ видѣ точки.

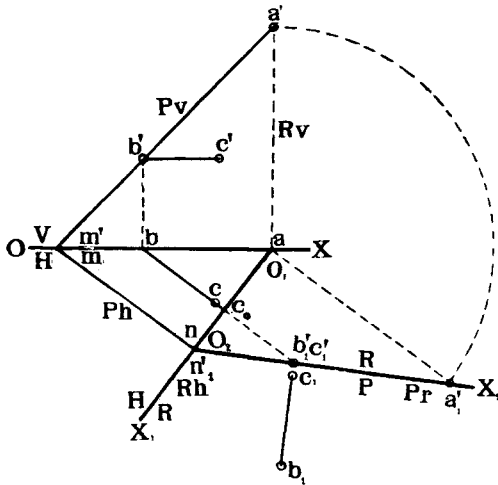
Откидываемъ верхнюю полу P влѣво; такъ какъ точки A и R въ системѣ $\frac{V}{R}$ лежали выше R , то онѣ спроектируются на верхнюю полу P , т. е. слѣва; откладывая $a_{02}a_1' = a_{01}a_1'$, получимъ точку $a_1'b_1'$, искомую проекцію прямой AB .

На чертежѣ 181 показанъ примѣръ рѣшенія слѣдующей задачи. Дана плоскость P и въ ней горизонталь RC . Перейти къ новой системѣ плоскостей проекцій, изъ которыхъ одна была бы плоскостью P .

Для рѣшенія задачи проводимъ промежуточную плоскость R перпендикулярную къ H и къ P ; при этомъ Rh будетъ перпендикулярно къ Ph , а $Rv \perp OX$. Переходимъ послѣдовательно отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$ и далѣе къ $\frac{R}{P}$.

Принимаемъ слѣдъ Rh за первую новую ось O_1X_1 , откидываемъ

верхнюю полу R вправо и строимъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ новую вертикальную проекцію b_1c_1' горизонтали, которая, будучи параллельной Ph , т. е. перпендикулярной къ R , спроектируется на R въ видѣ точки.



Черт. 181.

Черезъ эту точку, и черезъ новую точку схода слѣдовъ N долженъ пройти слѣдъ Pr плоскости P на R .

Очевидно линия Pr пройдетъ и черезъ точку a_1' , проекцію на R точки A пересѣченія слѣдовъ Bv и Pv .

Принимаемъ линію Pr за новую вторую ось O_2X_2 и откидываемъ переднюю полу R внизъ. Такъ линія RC въ системѣ $\frac{R}{H}$ лежала на передней полѣ P , то ея новая горизонтальная проекція расположится подъ осью O_2X_2 .

Откладываемъ $c_1c_1' = cc_0$ и $bb_1' = c_0b$. Линія b_1c_1 и будетъ проекціей RC на плоскость P въ системѣ $\frac{R}{P}$.

Рѣшимъ такую задачу (черт. 182).

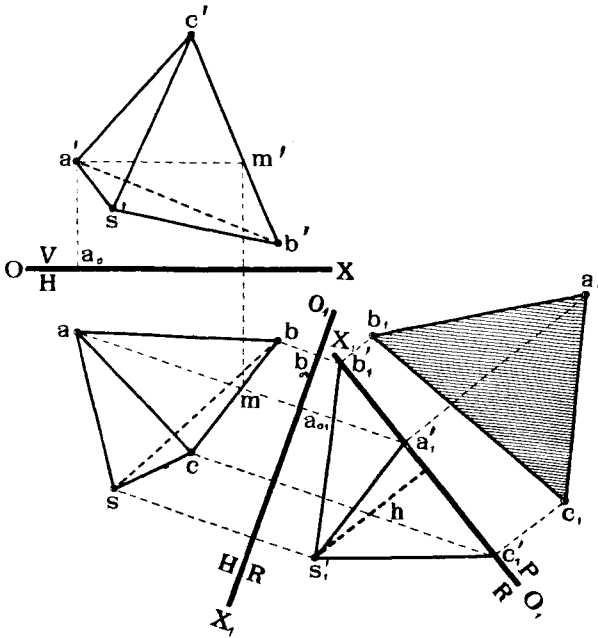
Дана пирамида $SABC$. Перемѣнить плоскость проекцій такъ, чтобы основаніе ABC и высота пирамиды въ новой системѣ проектировались безъ искаженія.

Для того, чтобы высота пирамиды проектировалась безъ искаженія, необходимо, чтобы плоскость проекцій была перпендикулярна къ основанію ABC пирамиды. Для того же, чтобы основаніе ABC проектировалось безъ искаженія, плоскость проекцій должна быть параллельна основанію, или совпадать съ нимъ.

Обозначимъ плоскость проекцій перпендикулярную къ ABC черезъ R ,

а самую плоскость ABC через P . Итакъ, мы имѣемъ систему $\frac{P}{R}$, въ которой требуемые элементы будутъ проектироваться безъ искаженія, причеъ $R \perp P$.

Проводимъ въ плоскости ABC горизонталь AM и выбираемъ плоскость R перпендикулярной къ этой горизонтали. При такихъ условіяхъ плоскость B будетъ перпендикулярна къ H и къ ABC . Очевидно, что основаніе ABC спроектируется на R въ прямую линію.



Черт. 182.

Переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, откидывая верхнюю полу B вправо.

Новыя вертикальныя проекціи пирамиды будутъ $a_1'b_1'c_1's_1'$. Разстояніе h точки s_1' до линіи $b_1'c_1'$ и будетъ выражать высоту пирамиды.

Принимаемъ линію $b_1'c_1'$, какъ линію сѣченія плоскостей P и B за вторую новую ось O_2X_2 и откидываемъ переднюю полу P вправо вверхъ. Строимъ новую горизонтальную проекцію $a_1b_1c_1$ основанія ABC ($a_1'a_1 = a_0'a_1$, $b_1'b_1 = b_0'b_1$ и т. д.). Фигура $a_1b_1c_1$ и даетъ истинный видъ основанія ARC .

На черт. 183 рѣшена слѣдующая задача:

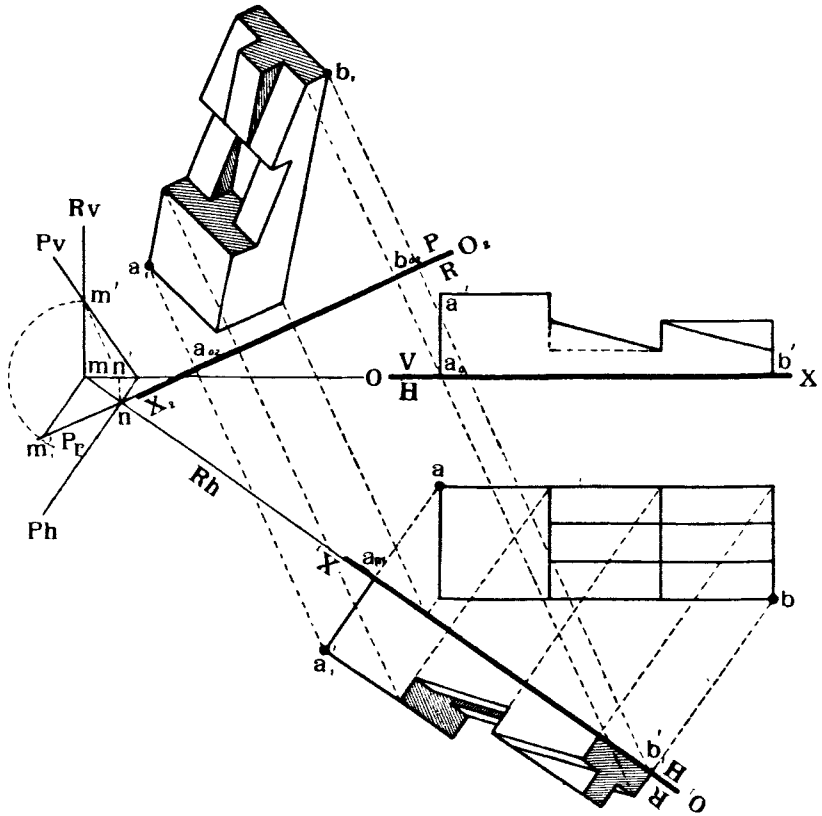
Опредѣлить уголъ между двумя не параллельными и не пересѣкающимися линіями AB и CD .

Для рѣшенія задачи проведемъ черезъ точку A линію AM , парал-

Рѣшеніе.

Для перехода отъ системы $\frac{V}{H}$ къ новой, въ которой одной изъ плоскостей проекцій была бы плоскость P , проводимъ промежуточную плоскость $R \perp H$ и $\perp P$.

Строимъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ новую вертикальную проекцію бруса, откидывая верхнюю полу R влѣво внизъ. На чертежѣ между прочимъ показано построение точки a_1' ($a_1'a_{01} = a_0a_1'$). Въ этой же системѣ строимъ слѣдъ P_r плоскости P на R , для чего проводимъ $mm_1' \perp Rh$ и откладываемъ $mm_1' = mm'$, гдѣ точка M является точкой пересѣченія слѣдовъ Rv и Pv . Соединяя точку m_1' съ новой точкой схода



Черт. 184.

слѣдовъ π , получимъ слѣдъ P_r , который и принимаемъ за вторую новую ось O_2X_2 . Откидываемъ переднюю полу P вверхъ влѣво и строимъ новую горизонтальную проекцію бруса (напримѣръ, $a_{02}a_1' = a_0a_1'$; $b_{02}b_1 = bb_1'$ и т. д.), которая даетъ наглядное изображеніе формы врубки.

§ 12. Пересѣченіе многогранниковъ.

Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію задачи на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ, необходимо умѣть рѣшить три задачи въ слѣдующей послѣдовательности:

Найти точку пересѣченія прямой линіи съ плоскостью.

Построить линію сѣченія многогранника съ плоскостью.

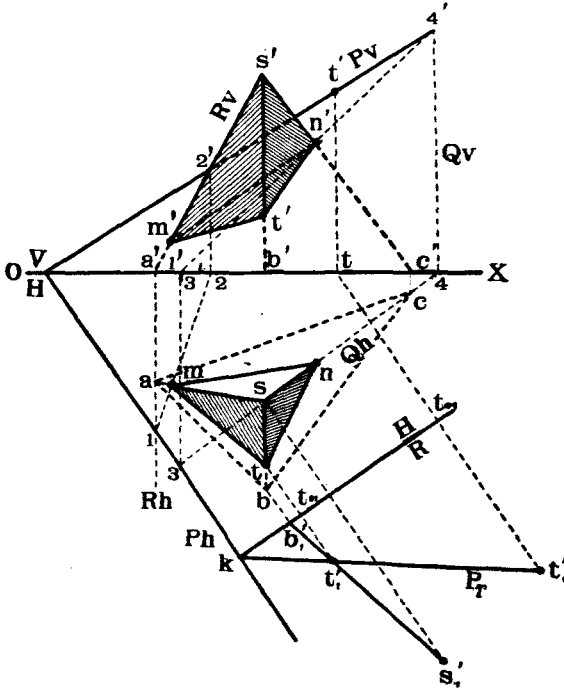
Построить точки пересѣченія многогранника съ прямою линіей.

Рѣшеніе первой изъ этихъ задачъ уже было приведено нами ранѣе (теорема 13, стр. 53).

Поэтому переходимъ къ рѣшенію двухъ другихъ задачъ.

а) Пересѣченіе многогранника съ плоскостью.

Эту задачу можно свести къ задачѣ на пересѣченіе линіи съ плоскостью. Дѣйствительно, если мы найдемъ всѣ точки, въ которыхъ ребра многогранника пересѣкаютъ данную плоскость, и послѣдовательно соединимъ ихъ между собою, то мы и получимъ искомую линію сѣченія.



Черт. 185.

Прослѣдимъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Даны: пирамида $SABC$ и плоскость P . Найти линію ихъ сѣченія (черт. 185).

Для рѣшенія этой задачи находимъ послѣдовательно точки пересѣченія реберъ SA , SB и SC пирамиды съ плоскостью P .

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SA съ P проводимъ черезъ

Сдѣлаемъ плоскость $R \perp V$ и находимъ линію **12** сѣченія R съ P ; точка M пересѣченія **12** съ AR и будетъ искомой.

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SC съ P проводимъ черезъ SC плоскость $Q \perp H$ и находимъ линію **34** сѣченія Q съ P .

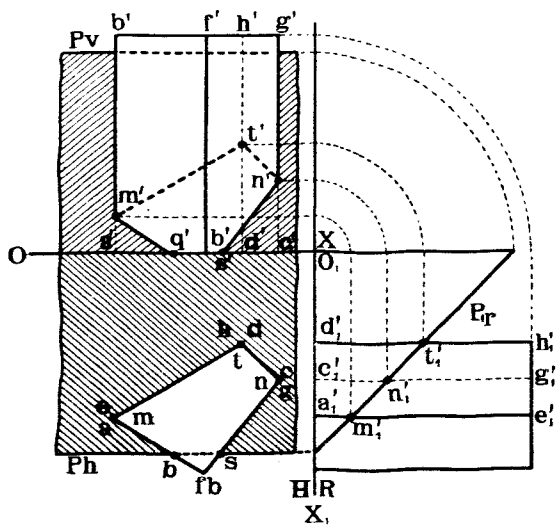
Точка N пересѣченія линій **34** и SC и будетъ искомой.

Для опредѣленія точки пересѣченія ребра SR пирамиды, которое случайно задано профильнымъ, съ плоскостью P , перемѣнимъ плоскость проекцій V на новую R , перпендикулярную къ H и къ P , спроектируемъ линію SR на R и найдемъ слѣдъ P на R въ системѣ $\frac{R}{H}$.

Такъ какъ $P \perp R$, то точка t_1' пересѣченія $b_1's_1'$ съ Pr будетъ новой вертикальной проекціей точки пересѣченія SB съ P . Переносимъ точку t_1' въ систему $\frac{V}{H}$ и соединяемъ между собой полученныя точки M , N и T . Линія MNT и будетъ искомой линіей сѣченія пирамиды съ плоскостью.

Даны: призма $ABCDEFGH$ и плоскость $P \parallel OX$. Найти линію ихъ сѣченія (черт. 186).

Мѣняемъ плоскость V на $R \perp OX$ и строимъ проекцію призмы и слѣдъ плоскости P на плоскости R . Такъ какъ $P \perp R$, то линія сѣче-



Черт. 186.

нія призмы съ P спроектируется на R въ линію, совпадающую съ Pr . Отмѣчаемъ въ проекціи на R точки m_1' , n_1' , t_1' пересѣченія реберъ призмы съ Pr и переносимъ ихъ въ систему $\frac{V}{H}$. Кромѣ того, въ системѣ $\frac{V}{H}$

замѣчаемъ точки Q и S пересѣченія контура основанія призмы съ слѣдомъ Ph .

Линія $QMTNS$ и будетъ искомою.

б) Пересѣченіе многогранника съ прямою линіей.

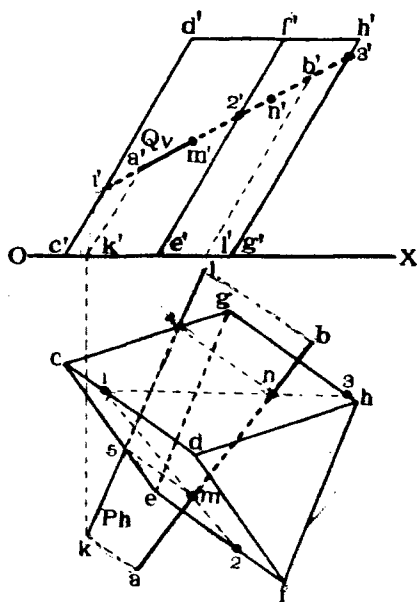
Эта задача сводится къ задачѣ на пересѣченіе многогранника съ плоскостью.

Дѣйствительно, проведемъ черезъ данную прямую какую-нибудь плоскость и найдемъ линію сѣченія этой плоскости съ многогранникомъ. Точки пересѣченія найденной линіи съ данной прямою и будутъ искомыми.

Разсмотримъ примѣненіе этого метода на примѣрахъ.

Дана наклонная призма $CDEFGH$ и прямая AD (черт. 187). Найти точки ихъ пересѣченія.

Проведемъ черезъ AB плоскость Q перпендикулярную къ V ; при этомъ Qv сольется съ $a'b'$. Найдемъ точки 1, 2 и 3 пересѣченія реберъ CD , EF и GH призмы съ плоскостью Q . Линіи 12 и 13 будутъ служить линіями сѣченія граней призмы $CDEF$ и $CDGH$ съ плоскостью Q . Точки же M и N пересѣченія данной линіи AB съ линіями 12 и 13 и будутъ искомыми.



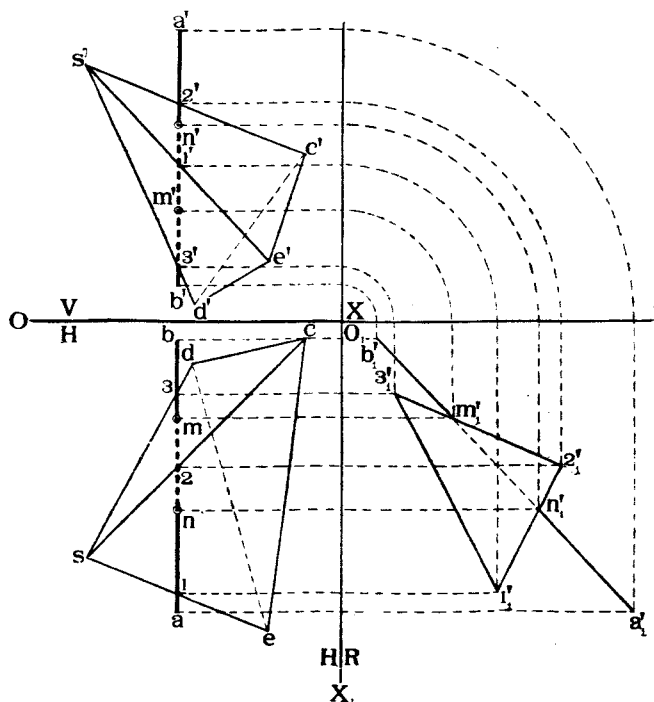
Черт. 187.

Ту же задачу можно рѣшить и иначе. Проведемъ черезъ AB плоскость P , параллельную ребрамъ CD , GH , EF призмы.

Для опредѣленія плоскости P достаточно черезъ точки A и B провести линіи AK и BL , параллельныя ребрамъ призмы. Соединяя горизонтальныя слѣды K и L этихъ линій, получимъ горизонтальный слѣдъ Ph вспомогательной плоскости P . Слѣдъ этотъ пересѣкаетъ основаніе CEG призмы въ точкахъ 4 и 5. Проводимъ черезъ эти точки линіи 4N и M5 параллельныя ребрамъ призмы. Эти линіи будутъ, очевидно, являться линіями сѣченія плоскости P съ призмой.

Точки M и N пересѣченія этихъ линій съ AB и будутъ искомыми.

Дана пирамида $SDCE$ и профильная линия AB (черт. 188). Найти точки их пересѣченія.



Черт. 188.

Проведемъ черезъ AB профильную плоскость и отмітимъ въ системѣ $\frac{V}{H}$ точки **1, 2, 3** пересѣченія этой плоскости съ ребрами пирамиды. Искомыми точками будутъ, очевидно, служить точки пересѣченія линіи AB съ ломаной линіей **123**.

Для нахождения этихъ точекъ перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, причемъ R выбираемъ параллельно упомянутой профильной плоскости. Строимъ въ проекціи на R сѣченіе на R сѣченіе **123** и линію AB . Точки n_1' и m_1' пересѣченія $a_1'b_1'$ съ $1_1'2_1'$ и съ $2_1'3_1'$ и будутъ проекціями искомымъ точекъ.

Остается ихъ лишь перенести въ систему $\frac{V}{H}$.

с) Пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ.

Эта задача основывается на предыдущихъ, и для рѣшенія ея поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

Находятъ сначала точки пересѣченія реберъ одного тѣла съ гранями

другого, затѣмъ реберъ второго съ гранями перваго, и полученныя точки послѣдовательно соединяють другъ съ другомъ.

Для облегченія рѣшенія этой задачи рекомендуется придерживаться такого плана:

1) Опредѣленіе сначала видимыхъ частей каждаго тѣла въ отдѣльности, независимо отъ другого и вычерчиваніе видимыхъ реберъ сплошной чертой, а невидимыхъ—пунктиромъ.

2) Опредѣленіе такихъ реберъ каждаго тѣла, которыя завѣдомо не пересѣкають граней другого.

3) Опредѣленіе точекъ пересѣченія реберъ перваго тѣла съ гранями второго.

4) Опредѣленіе точекъ пересѣченія реберъ второго тѣла съ гранями перваго.

5) Послѣдовательное соединеніе между собою найденныхъ точекъ. При этомъ соединяются другъ съ другомъ тѣ точки, которыя лежатъ на однѣхъ и тѣхъ же граняхъ каждаго тѣла. Линія, соединяющая эти точки и будетъ линіей сѣченія многогранниковъ.

6) Опредѣленіе видимости линіи сѣченія. Видимыми частями этой линіи въ каждой проекціи будутъ тѣ, которыя принадлежать пересѣкающимся видимымъ въ этой проекціи гранямъ обоихъ тѣлъ. Если же въ какой-нибудь проекціи хотя бы одна изъ граней будетъ невидима, то и линія сѣченія, лежащая въ этой грани, будетъ невидима.

7) Окончательное опредѣленіе видимости пересѣкающихся тѣлъ. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что ребра одного тѣла, лежащія внутри другого, будутъ невидимыми.

Прослѣдимъ рѣшеніе задачи на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Даны двѣ пирамиды $SABC$ и $TPQR$ (черт. 189).

Найти линіи ихъ сѣченія.

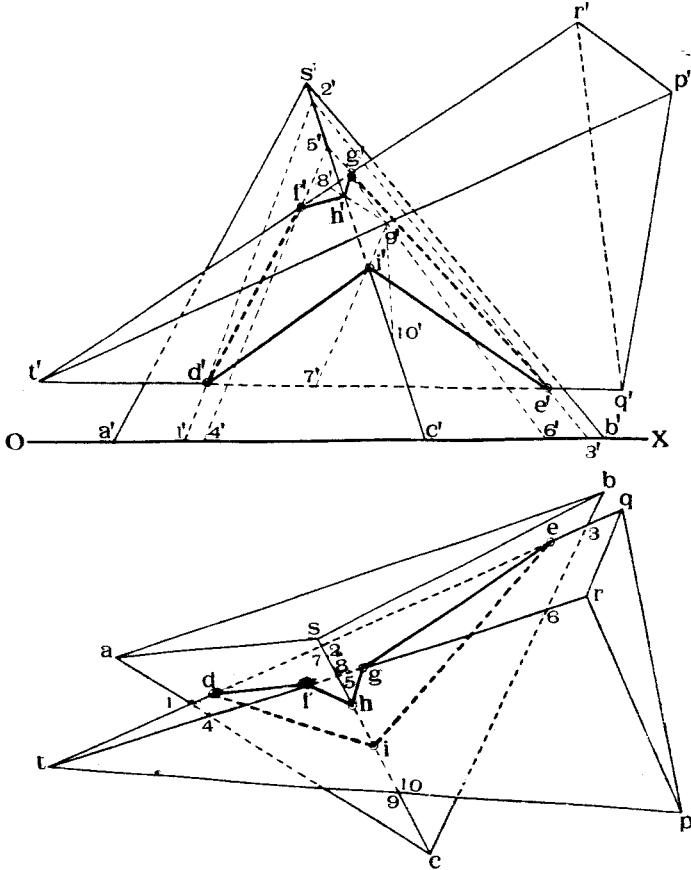
Опредѣливъ видимость каждой пирамиды въ отдѣльности, какъ это было уже объяснено ранѣе (§ 8, стр. 60), выяснимъ, какія ребра каждаго тѣла завѣдомо не пересѣкають граней другого. Къ таковымъ ребрамъ принадлежатъ тѣ, проекціи которыхъ на V или на H лежатъ внѣ контура проекціи на ту же плоскость другого тѣла.

Въ нашемъ случаѣ таковыми ребрами являются SA , SB , AB , AC , BC , RQ , BP , QP . Слѣдовательно, можетъ идти рѣчь о нахожденіи точекъ пересѣченія ребра SC съ пирамидой $TPQB$ и реберъ TQ , TB и TP съ пирамидой $SABC$.

Однако, нетрудно замѣтить, что ребро TP не пересѣкаетъ граней пирамиды $SABC$, такъ какъ точка **9** его лежитъ выше точки **10** ребра SC и въ тоже время ребро TP не пересѣкаетъ основаніе ABC внутри контура послѣдняго.

Остается, слѣдовательно искать пересѣченіе реберъ TQ и TR съ гранями пирамиды $SABC$ и ребра SC съ гранями пирамиды $TPQB$.

Такъ какъ tq лежитъ внѣ контура asb , а $t'q'$ — внѣ контура $a'c'b'$, то ребро TQ можетъ пересѣкаться лишь съ гранями SAC и SBC . Для опредѣленія этихъ точекъ пересѣченія проводимъ черезъ TQ плоскость перпендикулярную къ H и находимъ линію **123** сѣченія ея съ SAC и



Черт. 189.

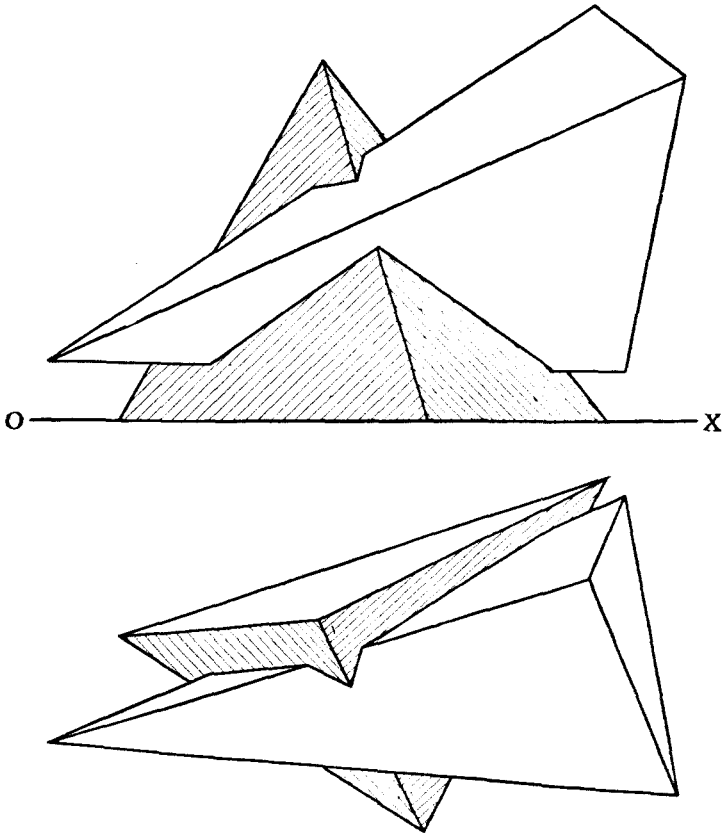
SRC . Точки D и E пересѣченія ребра TQ съ линіями **12** и **23** и будутъ служить точками пересѣченія ребра TQ съ пирамидой $SABC$.

Подобнымъ же образомъ находимъ и точки F и G пересѣченія ребра TR съ пирамидой $SABC$ и точки B и I пересѣченія ребра SC съ пирамидой $TPQR$.

Остается теперь соединить между собой полученные точки.

Точки D и F лежатъ на грани SAC и на грани TQB ; поэтому соединяемъ ихъ другъ съ другомъ. При этомъ линію df проводимъ

сплошной чертой, такъ какъ обѣ грани SAC и TQR видимы, если смотрѣть на H . Наоборотъ, вертикальная проекція $d'f'$ будетъ вычерчена пунктиромъ, такъ какъ DF лежитъ на невидимой грани TQR . если смотрѣть на V .



Черт. 190.

Руководствуясь подобными же соображеніями, соединяемъ между собою остальные точки и получаемъ искомую линію $DFHGEID$ сѣченія двухъ пирамидъ.

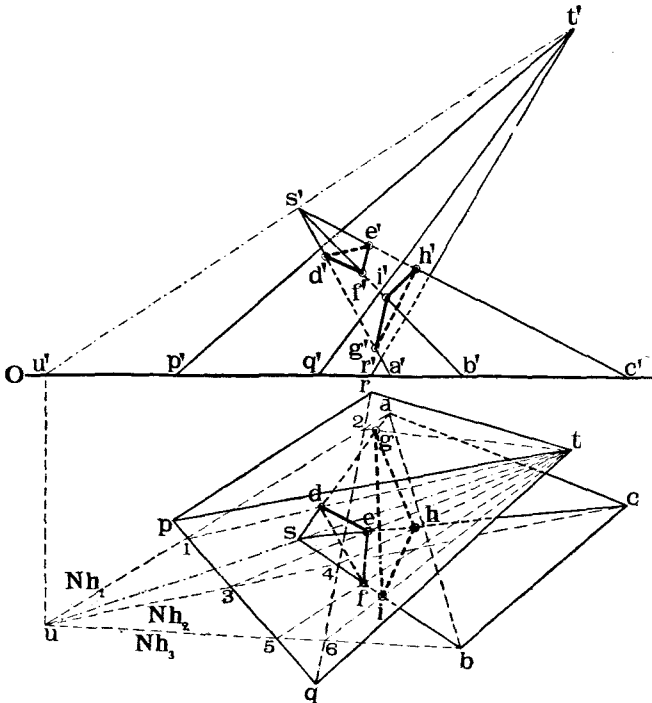
На черт. 190 тѣ же пирамиды изображены съ показаніемъ лишь видимыхъ частей ихъ.

Рѣшимъ теперь задачу на пересѣченіе двухъ пирамидъ нѣсколько инымъ способомъ, именно, будемъ проводить вспомогательныя плоскости черезъ каждое ребро не перпендикулярно на плоскости проекцій, а такъ, чтобы всѣ эти плоскости проходили черезъ линію, соединяющую вершины пирамидъ.

Этотъ способъ удобно примѣнять тогда, когда основанія пирамидъ

лежать въ одной плоскости, а линія вершинъ эту плоскость пересѣкаетъ.

Пусть, напримѣръ, даны двѣ пирамиды $SABC$ и $TPQR$ (черт. 191), стоящія на H , требуется построить линію ихъ сѣченія.



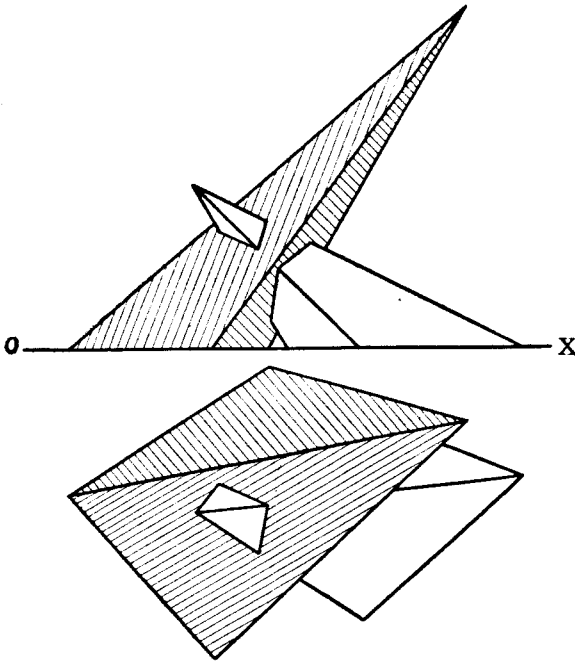
Черт. 191.

Соединяемъ вершины S и T и находимъ горизонтальный слѣдъ U линіи ST . Проведемъ черезъ линію ST и ребро SA плоскость N_1 , горизонтальнымъ слѣдомъ Nh_1 этой плоскости будетъ линія, соединяющая точки a и u , и находимъ точки 1 и 2 пересѣченія сторонъ PQ и RP съ Nh_1 .

Линіи $T1$ и $T2$, соединяющія точку S съ точками 1 и 2 , будутъ служить линіями сѣченія граней TPQ и TRQ пирамиды съ плоскостью N_1 , а точки D и G пересѣченія линіи SA съ линіями $T1$ и $T2$ будутъ служить точками пересѣченія ребра SA съ гранями TPQ и TRQ .

Подобнымъ же образомъ находимъ и точки E и H пересѣченія ребра SC съ гранями TPQ и TQR , для чего служитъ вспомогательная плоскость N_2 и линіи $T3$ и $T4$. Наконецъ, находимъ точки F и I пересѣченія ребра SB съ гранями TPQ и TRQ , для чего служитъ вспомогательная плоскость N_3 и линіи $T5$ и $T6$. Соединяя между собой точки

D, E, F и G, H, I получимъ линію GHI входа въ пирамиду $TPQR$ и линію DEF —выхода изъ нея пирамиды $SABC$.



Черт. 192.

На черт. 192 показаны отдѣльно видимыя части обѣихъ пирамидъ.

Даны двѣ призмы $ABCDEF$ и $GHIKLM$ стоящія на H . Построить линію ихъ сѣченія (черт. 193).

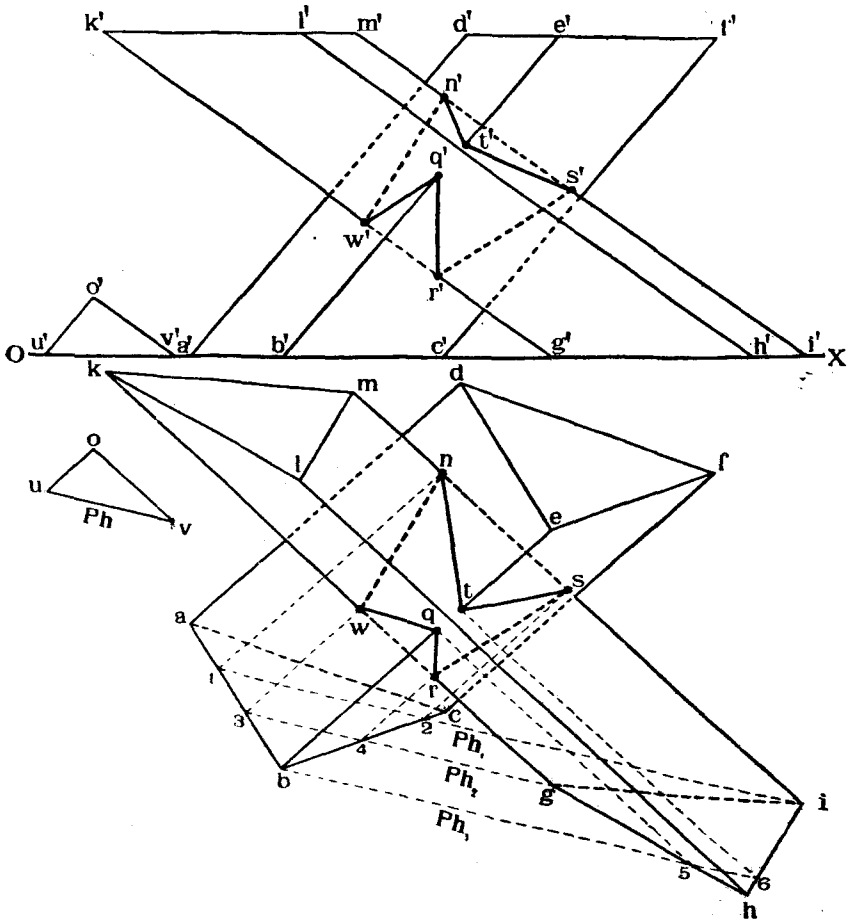
Въ качествѣ вспомогательныхъ плоскостей, которыя мы будемъ проводить черезъ ребра каждой призмы, выберемъ такія, которыя были бы параллельны ребрамъ другой призмы. Найдемъ направленіе горизонтальныхъ слѣдовъ этихъ плоскостей. Для этого черезъ случайную точку O проведемъ линіи OU и OV , параллельныя ребрамъ призмъ.

Соединяя горизонтальные слѣды U и V этихъ линій получимъ направленіе P_h горизонтальныхъ слѣдовъ упомянутыхъ плоскостей.

Найдемъ теперъ точки пересѣченія ребра MI съ призмой $ABCDEF$.

Проводимъ черезъ ребро MI плоскость P_1 , параллельную ребрамъ другой призмы.

Горизонтальный слѣдъ Ph_1 этой плоскости пройдетъ черезъ точку i параллельно Ph . Замѣтимъ точки 1 и 2 пересѣченія Ph_1 съ ab и bc и проведемъ линіи $1N$ и $2S$ параллельно ребрамъ призмы $ABCDEF$. Линіи $1N$ и $2S$ будутъ линіями сѣченія плоскости P_1 съ гранями $ABDE$



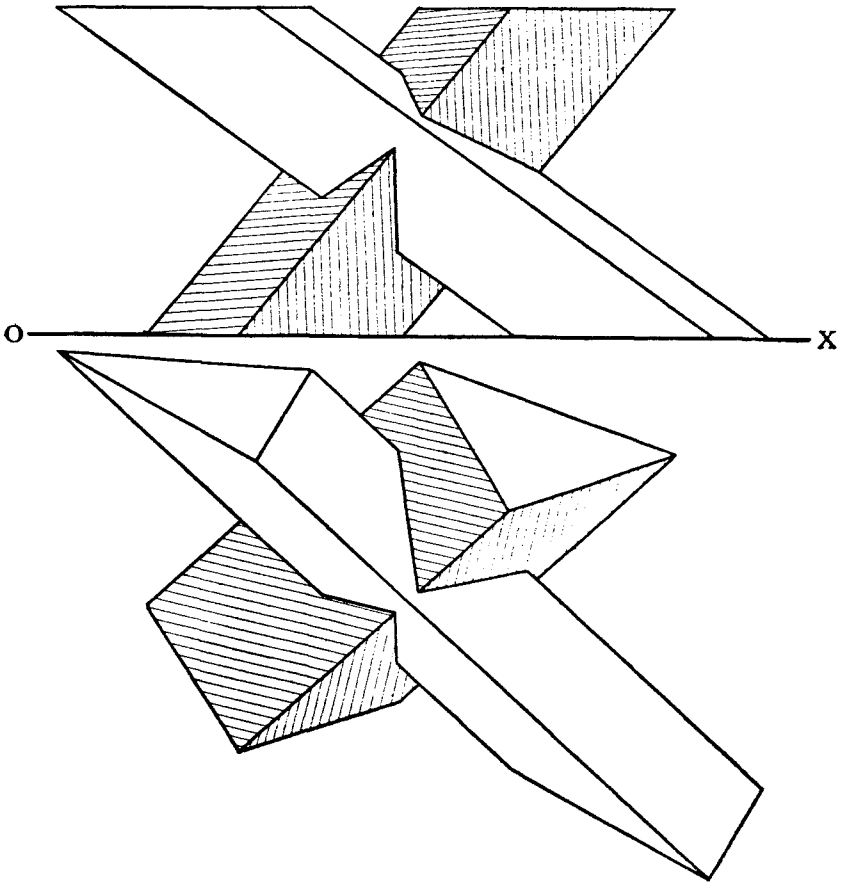
Черт. 193.

и $BCEF$. Точки же N и S пересѣченія этихъ линіи съ ребромъ MI будутъ служить точками пересѣченія ребра MI съ призмой $ABCDEF$.

Подобнымъ же образомъ находимъ точки W и R пересѣченія ребра KG съ гранями $ABDE$ и $BCEF$, для чего служатъ вспомогательная плоскость P_2 и линіи $3W$ и $4R$.

Наконецъ, находимъ точки Q и T пересѣченія ребра BC съ гранями $KIGH$ и $LMNI$, для чего служатъ вспомогательная плоскость P_3 и линіи $5Q$ и $6T$.

Соединяя послѣдовательно полученныя точки, получаемъ искомую линію сѣченія $NTSRQW$ призмъ ¹⁾.



Черт. 194.

На черт. 194 показаны видимыя части пересѣкающихся призмъ.

¹⁾ Существуетъ рядъ механическихъ способовъ, позволяющихъ довольно быстро, вѣрно и безъ работы воображенія соединять между собою полученныя точки, принадлежащія линіи сѣченія многогранниковъ. Мы этихъ способовъ здѣсь не приводимъ, такъ какъ имѣемъ въ виду необходимость для читателя развивать свое воображеніе, не пощаюаясь упомянутыми механическими способами. Желающіе же могутъ однако вайти описаніе этихъ способовъ въ слѣдующихъ еочиненіяхъ:

1. Д. Анановъ. „Механическій способъ соединенія точекъ при пересѣченіи многогранниковъ“. СПб. 1910.

2. R. Bricard. „Géométrie Descriptive“. Paris. 1911. Pg. 53.

3. Locht-Labye. „Précis dn Cours de Géométrie Descriptive“. Liege. Prt. I. Pg. 100.

4. R. Hausner. „Darstellende Geometrie“. Leipzig 1908. Th. I. St. 196.

5. B. Sturm. „Elemente der Darstellenden Geometrie“. Leipzig. 1900. St. 114.

6. I. Badon Ghijben. „Gronden der Beschrijvende Meetkunde“. Breda. 1906. Eerste deel 130.

Задача № 19.

На чертежѣ 195 даны проекціи трехъ крышъ: двухъ—двускатныхъ и одной—пирамидальной. Построить линіи ихъ сѣченія.

Рѣшеніе.

Опредѣляемъ линіи сѣченія крышъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

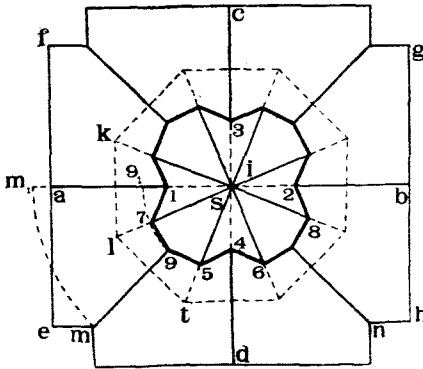
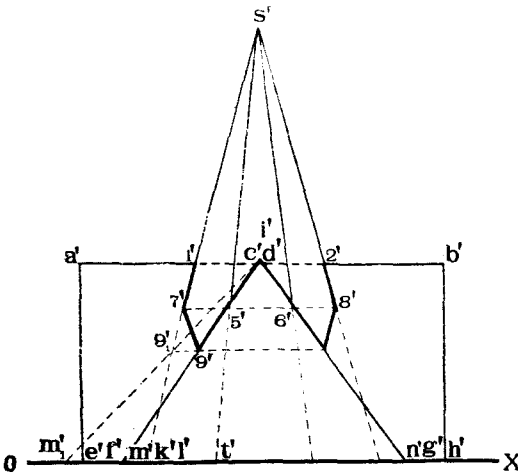
Прежде всего находимъ линіи сѣченія скатовъ двускатныхъ крышъ, т. е. четыре линіи типа *MI*. Затѣмъ, имѣя въ виду, что лѣвая и правая грани пирамиды перпендикулярны къ *V*, находимъ точки 1 и 2 пересѣченія съ этими гранями конька *AB*. Точки 3 и 4 пересѣченія конька *CD* расположатся на *CD* такъ же, какъ 1 и 2 на *AB*.

Точки 5 и 6 пересѣченія реберъ пирамиды съ крышею *CDMN* опредѣлятся на вертикальной проекціи точками 5' и 6' пересѣченія проекцій *s'5'* и *s'6'* съ проекціями *m'd'* и *n'd'* граней.

Точки пересѣченія остальныхъ реберъ пирамиды съ двускатными крышами расположатся симметрично съ точками 5 и 6. Точку 9 пересѣченія разжелобка *MI* съ пирамидой можно опредѣлить, вращая линію *MI* и пирамиду вокругъ оси послѣдней до тѣхъ поръ, пока грань *LTS* пирамиды не станетъ $\perp V$. Тогда линія *MI* расположится параллельно *V*, и точка встрѣчи *MI* съ *LTS* будетъ в'9. Поворачивая эту точку обратно, найдемъ ея положеніе 9, 9'.

Остальные точки, аналогичныя точкѣ 9, расположатся симметрично съ ней относительно оси пирамиды на остальныхъ разжелобкахъ двускатныхъ крышъ.

Соединяя между собой полученныя точки, получимъ искомую линію сѣченія.



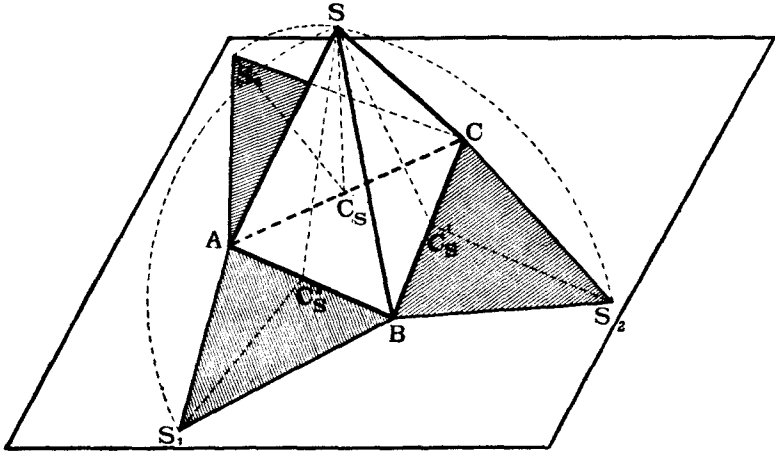
Черт. 195.

§ 13. Развертка поверхностей многогранниковъ.

При построении моделей различныхъ металлических отливокъ, фасонныхъ камней, сложныхъ деревянныхъ еопраженій и т. п. часто бываетъ необходимо знать истинныя фигуры каждой грани модели, чтобы по этой фигурѣ построить шаблонъ грани.

Для опредѣленія истинныхъ фигуръ граней тѣла пользуются разверткой его поверхности.

Разверткой поверхности многогранника называется плоская фигура, полученная при совмѣщеніи граней тѣла съ плоскостью одной изъ нихъ



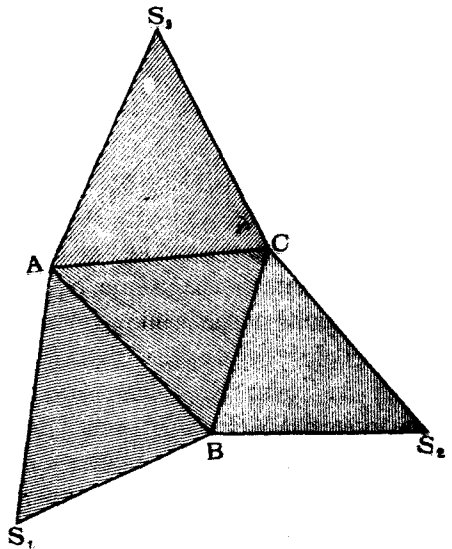
Черт. 196.

съ помощью послѣдовательнаго вращенія граней вокругъ разныхъ реберъ тѣла.

На черт. 196 изображена пирамида $SABC$. Разрѣжемъ поверхность ея по ребрамъ SA , SB и SC и совмѣстимъ ея боковыя грани съ плоскостью основанія ABC , вращая ихъ соотвѣтственно вокругъ реберъ AB , BC и AC .

Тогда точка S , принадлежащая всѣмъ тремъ боковымъ гранямъ, будетъ описывать дуги круговъ съ центрами въ точкахъ C_s , C_s' и C_s'' и упадетъ, при совмѣщеніи грани ABS , въ точку S_1 , при совмѣщеніи грани BCS , въ точку S_2 , и при совмѣщеніи грани ACS , въ точку S_3 .

Полученная плоская фигура изображена отдѣльно на черт. 197 и называется разверткой поверхности пирамиды.



Черт. 197.

Вообще говоря, развертку поверхности любого многогранника можно построить, опредѣливъ истинныя величины всѣхъ его реберъ и діагона-

лей каждой его грани, которыя дѣлили бы эти грани на рядъ треугольниковъ. Тогда задача на построение развертки свелась бы къ задачѣ на опредѣленіе истинной длины отрѣзковъ прямыхъ линий и къ послѣдовательному построению ряда треугольниковъ по тремъ извѣстнымъ сторонамъ ихъ.

Въ частности же при построении развертокъ и для опредѣленія истинной фигуры граней многогранника пользуются методами вращения или перемѣны плоскостей проекціи.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ построения развертокъ поверхности многогранниковъ.

Дана пирамида $SABC$ (черт. 198). Построить развертку ея поверхности.

Такъ какъ пирамида стоитъ на H , то основаніе ея на эту плоскость проектируется безъ искаженія.

Совмѣстимъ и остальные грани пирамиды съ плоскостью H .

Начнемъ совмѣщеніе съ грани SAB .

Повернемъ ее вокругъ AB до совпаденія съ H . Тогда точка S опишетъ кругъ съ центромъ въ C_1 . Радиусъ вращения точки S , опредѣлится, какъ гипотенуза, изъ прямоугольнаго треугольника sC_1s_1' , въ которомъ прямой уголъ при вершинѣ s , а катетъ $sS_1' = s_0s'$. Совмѣщенное положеніе S_1 точки S получится въ точкѣ пересѣченія двухъ линий: $sc_1 \perp ab$ и дуги круга, описаннаго изъ центра c_1 радиусомъ c_1S_1' .

Фигура S_1ab будетъ разверткой грани SAB .

Для опредѣленія развертки грани SAC достаточно опредѣлить лишь длину ребра SC , такъ какъ длина ребра SA уже опредѣлена и равна длинѣ S_1a .

Длину SC опредѣляемъ пользуясь теоремой 4-й (стр. 21), какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника $ss_2'c$ съ прямымъ угломъ при вершинѣ s и съ катетомъ $ss_2' = ss_1' = s_0s'$.

Совмѣщенное положеніе S_2 точки S при вращеніи грани SAC опредѣлится какъ пересѣченіе двухъ дугъ круговъ: одного, описаннаго изъ точки c радиусомъ $s_2'c$, и другого, описаннаго изъ точки a радиусомъ S_1a .

Ту же точку S_2 можно было бы опредѣлить, имѣя въ виду, что при совмѣщеніи SAC съ H , точка S будетъ двигаться въ плоскости, проходящей черезъ S и перпендикулярной къ AC .

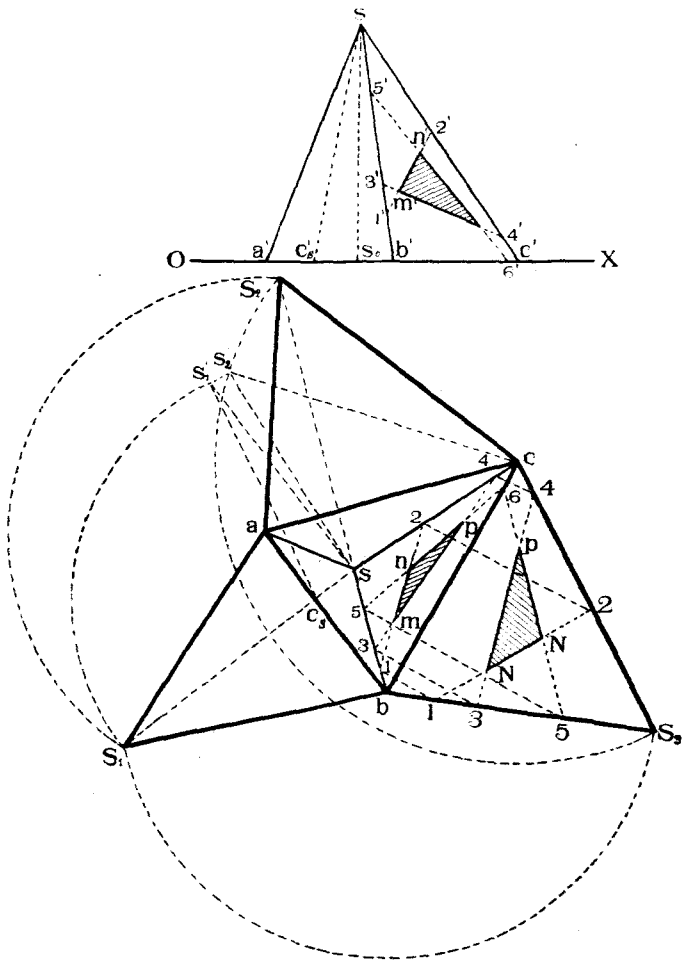
Поэтому точка S_2 опредѣляется также пересѣченіемъ перпендикуляра S_2s къ ac и дуги круга, описаннаго изъ a радиусомъ S_1a .

Наконецъ, развертку грани SBC легко построить, имѣя уже опредѣленными три стороны ея $BC = bc$, $bS_3 = bS_1$ и $cS_3 = cS_2$.

Если на какой-нибудь грани пирамиды была бы начерчена фигура,

напримѣръ, MNP , и требовалось бы показать ту же фигуру на разверткѣ, то можно поступить слѣдующимъ образомъ.

Продолжимъ стороны фигуры MNP до пересѣченія съ ребрами SB , SC и BC въ точкахъ **1**, **2**, **3**, **4**, **5** и **6**. При совмѣщеніи SBC съ H , точки **1**, **2**, **3**, **4**, **5** будутъ двигаться по линиямъ, перпендикулярнымъ къ bc , и расположатся на соответственныхъ, совмѣщенныхъ съ H , ребрахъ пирамиды въ точкахъ **1**, **2**, **3**, **4**. и **5**.

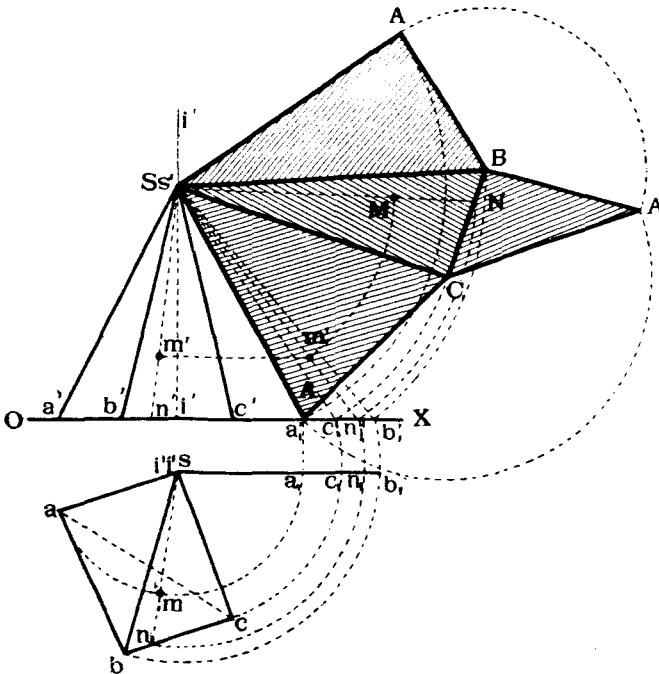


Черт. 198.

Соединяя эти послѣднія точки попарно линиями **12**, **34**, **56**, мы получимъ въ пересѣченіи этихъ линий точки M , N , P , опредѣляющія исконую фигуру MNP на разверткѣ грани SBC .

Разсмотримъ теперь другой способъ построения развертки пирамиды $SABC$ (черт. 199), стоящей на H .

Опредѣлимъ истинныя длины реберъ SA , SB и SC пирамиды вращая ихъ вокругъ оси II , проходящей черезъ вершину S и перпендикулярной къ H , до положенія, параллельнаго V . Истинныя длины этихъ реберъ будутъ соответственно равны отрѣзкамъ $s'a_1'$, $s'b_1'$ и $s'c_1'$.



Черт. 199.

Зная эти длины и имѣя въ виду, что ребра AC , AB и BC проектируются на H безъ искаженія въ отрѣзки ac , ab и bc , строимъ на V развертку поверхности пирамиды, начиная ее со стороны SA , совпадающей съ $s'a_1'$.

Точки C , B , A развертки опредѣляются изъ условія, что:

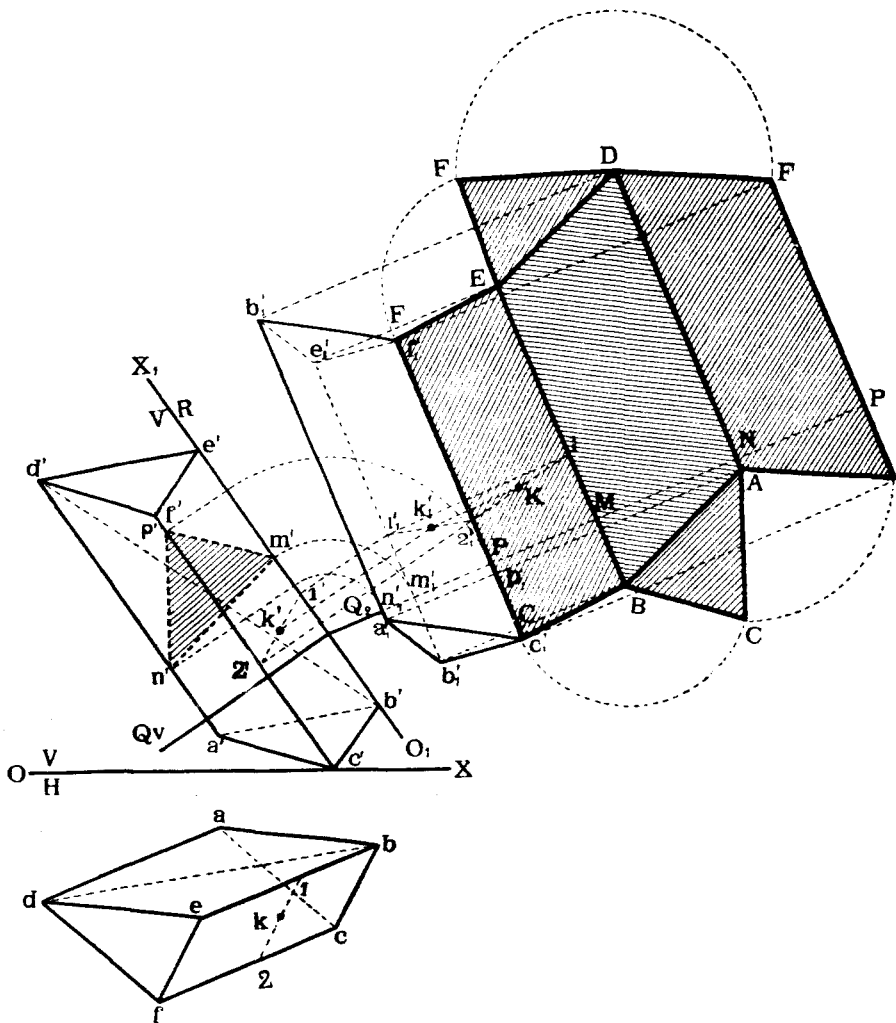
$$SA = s'a_1'; SB = s'b_1'; SC = s'c_1'; AC = ac; BC = bc; AB = ab.$$

Если бы требовалось показать на разверткѣ, напримѣръ, грани SBC точку M , лежащую въ этой грани и заданную проекціями m' и m , то построить ее можно было бы слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ m' , m линію $s'm'$, sm и находимъ точку n' , n ея пересѣченія съ $b'c'$, bc . Вращаемъ линію $s'n'$, sn вокругъ оси II до положенія, параллельнаго V , и отмѣчаемъ на повернутомъ положеніи $s'n_1'$ этой

линіи точку m_1' . Далѣе, засѣкаемъ сторону BC дугою изъ центра s' радиуса $s'n_1'$ въ точкѣ N , и соединяемъ S съ N .

Засѣкаемъ линію SN дугою радиуса $s'm_1'$ изъ центра s' къ точкѣ M , которая и будетъ искомою.



Черт. 200.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ развертки призмы $ABCDEF$ (чертежъ 200), заданной случайнымъ образомъ.

Для опредѣленія истинной величины ея длинныхъ реберъ мѣняемъ плоскости проекцій такъ, чтобы новая горизонтальная плоскость B была перпендикулярна къ V и параллельна этимъ ребрамъ, и переходимъ отъ

системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$. Строимъ новую вертикальную проекцію $a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$ призмы на плоскости B .

Развертку призмы построимъ въ плоскости R и начнемъ съ ребра FC , которое проектируется на R безъ искаженія.

Примемъ FC совпадающимъ съ $f_1'c_1'$. При построеніи развертки замѣтимъ, что точки ея E, D, B и другія будутъ лежать на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ точекъ e_1', d_1', b_1' и т. д. къ линіи FC . Разстоянія же между ребрами FC, BE, DA и т. д. развертки должны равняться истиннымъ разстояніямъ между этими ребрами. Чтобы опредѣлить эти разстоянія построимъ сѣченіе призмы съ плоскостью, перпендикулярной къ ея ребрамъ, и найдемъ истинную фигуру—треугольникъ этого сѣченія. Стороны этого треугольника и будутъ равны разстояніямъ между ребрами призмы.

Итакъ, проводимъ въ системѣ $\frac{V}{R}$ плоскость Q , перпендикулярную къ ребрамъ призмы ($Qv \perp O_1X_1$ и $Q_r \perp FC$). Линія сѣченія Q съ призмой спроектируется на B въ прямую линію $n_1'm_1'p_1'$.

Совмѣщаемъ Q съ V , вращая Q вокругъ слѣда Qv и находимъ совмѣщенную, а слѣдовательно, и истинную фигуру $n'm'p'$ треугольника MNP .

Далѣе, откладываемъ вдоль линіи Q_r отъ точки P послѣдовательно отрѣзки $PM = p'm'$; $MN = m'n'$ и $NP = n'p'$.

Черезъ точки M, N и P проводимъ линіи параллельныя FC до пересѣченія въ точкахъ A, B, C, D, E, F съ ранѣе упомянутыми перпендикулярами къ FC , проведенными изъ точекъ $a_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1'$.

Соединяя между собой точки C, B, A, C и F, E, D, F , получимъ развертку боковой поверхности призмы. Зная же длины сторонъ FE, ED и DF , а также CB, BA и AC , нетрудно къ этой разверткѣ пристроить и треугольники ABC и DEF основаній призмы.

Для построенія на разверткѣ точки K , случайно заданной на грани $BCFE$, проводимъ въ системѣ $\frac{V}{H}$ черезъ эту точку какую-нибудь линію **12**.

Находимъ проекцію $1_1'2_1'$ этой линіи и проекцію k_1' точки на B . Изъ точки $1_1'$ опускаемъ перпендикуляръ на FC до пересѣченія съ EB и соединяемъ точки **1** и **2** ($2_1'$). Изъ k_1' опускаемъ перпендикуляръ на FC до пересѣченія съ **12** въ точкѣ K , которая и будетъ искомой.

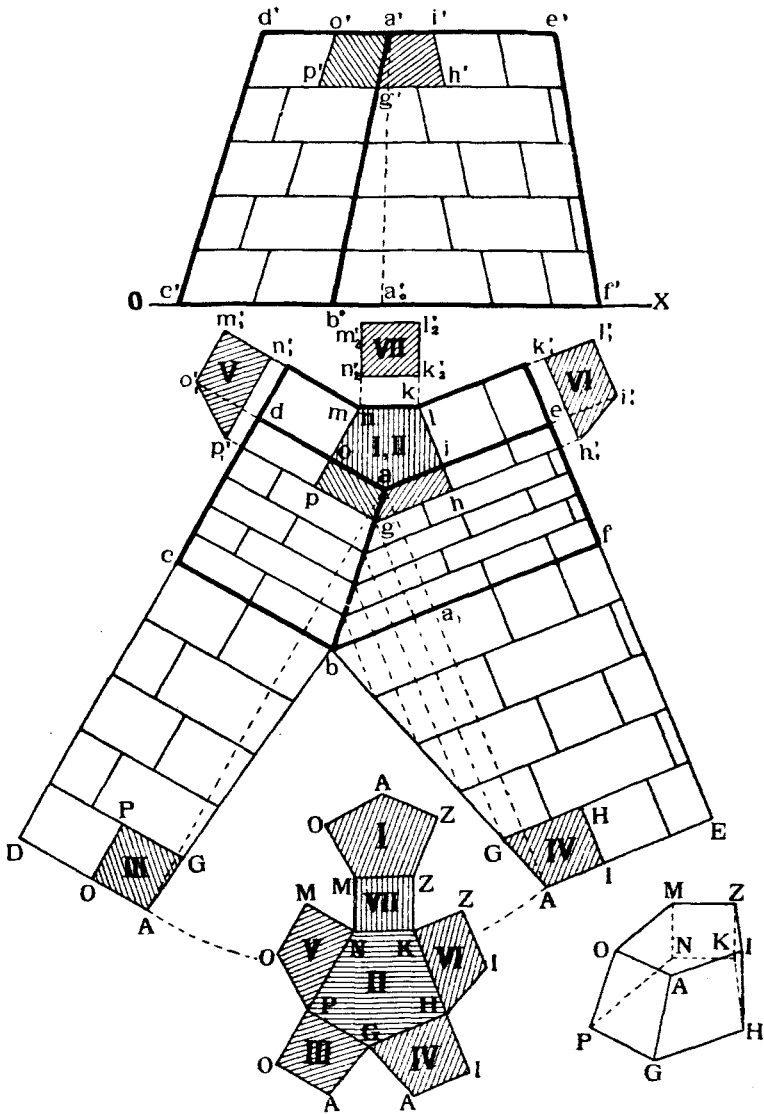
Задача № 20.

На черт. 201 изображена въ планѣ и фасадѣ часть каменной набережной, фасадъ которой $CDAEFB$ облицованъ штучными гранитными камнями. Опредѣлить истинные размѣры фасадныхъ граней этихъ камней ¹⁾ и построить развертку поверхности верхняго углового камня, который на чертежѣ заштрихованъ.

¹⁾ При этомъ можно пренебречь толщиной швовъ.

Рѣшеніе.

Для опредѣленія истинныхъ размѣровъ фасадныхъ камней совмѣстимъ фасадныя грани набережной съ H , вращая одну вокругъ линіи BF , другую—вокругъ BC . Построенія аналогичны описаннымъ на стр. 87. Находимъ совмѣщенное положеніе



Черт. 201.

точки A правой фасадной грани. Соединяя A съ b и проводя $AE \parallel bf$, получаемъ совмѣщенное положеніе правой фасадной грани набережной. На ней уже нетрудно построить и изображенія отдѣльныхъ камней.

Подобнымъ же образомъ строимъ и совмѣщенное положеніе $bcDA$ лѣвой фасадной грани, имѣя при этомъ въ виду, что bA , равная длинѣ bA , только что опредѣлена.

Переходимъ теперь къ развѣрткѣ поверхности верхняго углового камня. Верхняя I и нижняя II грани его проектируются на H безъ искаженія въ пятиугольники $ailmo$ и $ghknp$. Фасадныя его грани III и IV' получаются въ неискаженномъ видѣ на вышеупомянутыхъ развѣрткахъ фасадныхъ граней набережной.

Боковыя грани $PNMO$ и $HKLI$ опредѣляются при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій, проектированіемъ этихъ граней на плоскости имъ параллельныя. Истинныя фигуры этихъ граней будутъ $p_1'n_1'm_1'o_1'$ и $h_1'k_1'l_1'i_1'$, причѣмъ высота этихъ фигуръ $m_1'n_1' = k_1'l_1'$ равна разности разстояній точекъ a' и g' отъ OX .

Истинная фигура задней грани $MNKL$ будетъ прямоугольникомъ $m_2'n_2'k_2'l_2'$, въ которомъ $n_2'k_2' = mk$, а $n_2'm_2' = n_1'm_1'$.

На чертежѣ 201 внизу всѣ отдѣльныя истинныя фигуры граней камня соединены въ одну общую развѣртку. Если такую развѣртку вырѣзать изъ бумаги, согнуть по ребрамъ и склеить, то получится модель камня, изображенная на чертежѣ 201 справа внизу.

§ 14. Построеніе многогранниковъ.

Построеніе многогранниковъ можетъ быть подчинено разнообразнымъ условіямъ, такъ что нельзя указать общихъ правилъ для рѣшенія этой задачи.

Въ каждомъ частномъ случаѣ въ зависимости отъ данныхъ величинъ можно построить проекціи многогранника, пользуясь въ большинствѣ случаевъ методами вращенія или перемѣны плоскостей проекцій.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Построить проекціи трехгранной пирамиды $SABC$, стоящей на H основаніемъ ABC . Длины всѣхъ реберъ пирамиды даны (черт. 202).

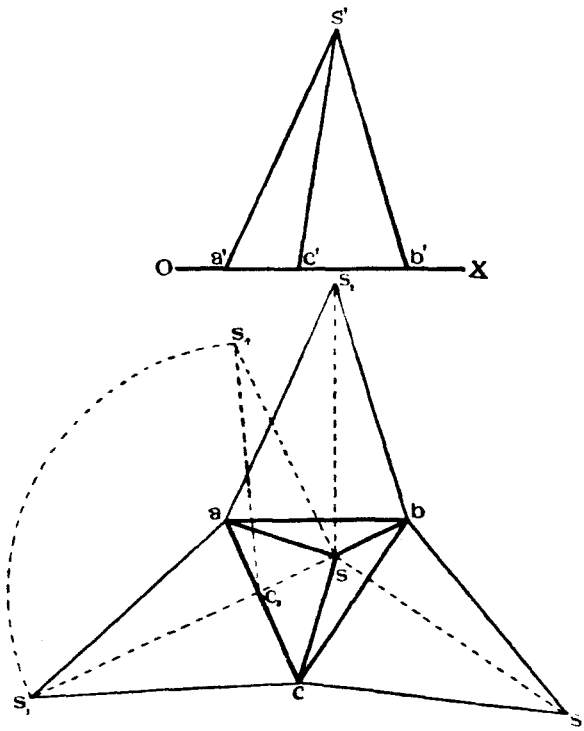
Для рѣшенія этой задачи строимъ на H развѣртку граней пирамиды а затѣмъ поднимаемъ боковыя грани s_1ac , s_2ab и s_3bc въ пространство, вращая ихъ соответственно вокругъ реберъ ac , ab и bc . При вращеніи точекъ s_1 и s_2 онѣ будутъ двигаться по кругамъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ осямъ вращенія ac и ab . Горизонтальная проекція s вершины пирамиды опредѣлится, какъ точка пересѣченія линіи $s_1s \perp ac$ и $s_2s \perp ab$. Если построенія сдѣланы правильно, то линія s_3s будетъ перпендикулярна къ bc .

Для опредѣленія вертикальной проекціи s' вершины пирамиды совмѣщаемъ плоскость круга вращенія точки s_1 съ H , вращая ее вокругъ линіи s_1s .

Тогда вершина S расположится на линіи $s_4s \perp s_1s$ въ такой точкѣ s_4 , которая должна отстоять отъ точки s_1 на разстояніи, равномъ радиусу вращенія точекъ s_1 , т. е. $s_1'c_1$. Отрѣзокъ s_4s и даетъ величину возвышенія вершины пирамиды надъ H . Зная его, нетрудно опредѣлить и точку s' и построить вертикальную проекцію пирамиды.

Построить проекціи правильного додекаэдра, стоящаго на плоскости H , по данной длинѣ реберъ его.

Ранѣе (черт. 136), нами были приведены проекціи общаго вида додекаэдра.

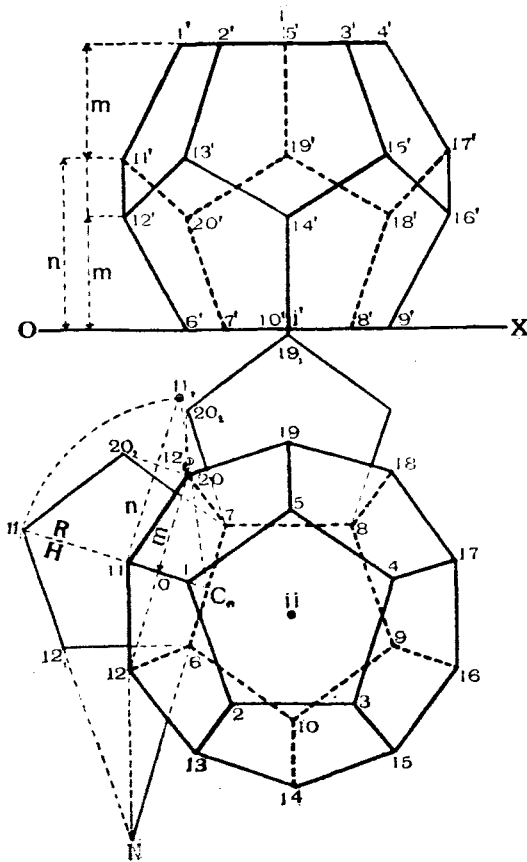


Черт. 202.

Для построения его, строимъ (черт. 203) на H правильный пятиугольник 678910, служащій основаніемъ додекаэдра. Далѣе пристраиваемъ въ H къ сторонамъ 67 и 78 еще два пятиугольника, которые принимаемъ за совмѣщенные съ H положенія двухъ боковыхъ граней додекаэдра. Поднимаемъ теперь обѣ эти грани въ пространство, вращая ихъ соответственно вокругъ реберъ 67 и 78 до тѣхъ поръ, пока вершины 20_1 и 20_2 не совпадутъ въ точкѣ **20**, горизонтальная проекція которой 20 опредѣлится въ пересѣченіи линій $20_1 20 \perp 67$ и $20_2 20 \perp 78$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ и точку 12.

Для опредѣленія горизонтальной проекціи точки 11 продолжимъ линію 11,12₁ до пересѣченія съ осью 67 въ точкѣ N . Эта линія послѣ поворота займетъ положеніе $N12$ и горизонтальная проекція 11 точки **11** опредѣлится въ пересѣченіи линіи $N12$ и $11, C_{11} \perp 67$.

Возвышеніе точекъ **11** и **12** надъ H можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{R}$, причеъ R выберемъ перпендикулярной къ оси 67 въ точкѣ C_{11} .



Черт. 203.

Тогда проекція 11_2 точки **11** на R опредѣлится, какъ точка пересѣченія линіи $11, 11_2 \perp$ къ $11_1, C_{11}$ и дуги круга описаннаго изъ центра C_{11} радиусомъ 11_1C_{11} .

Длина n отрѣзка $11, 11_2$ и даетъ возвышеніе надъ H точки **11**. Возвышеніе точки **12** надъ H найдемъ, опуская отъ 12 перпендикуляръ на линію 11_1C_{11} , и замѣчая точки пересѣченія его съ осью $\frac{R}{H}$ и линіей 11_1C_{11} .

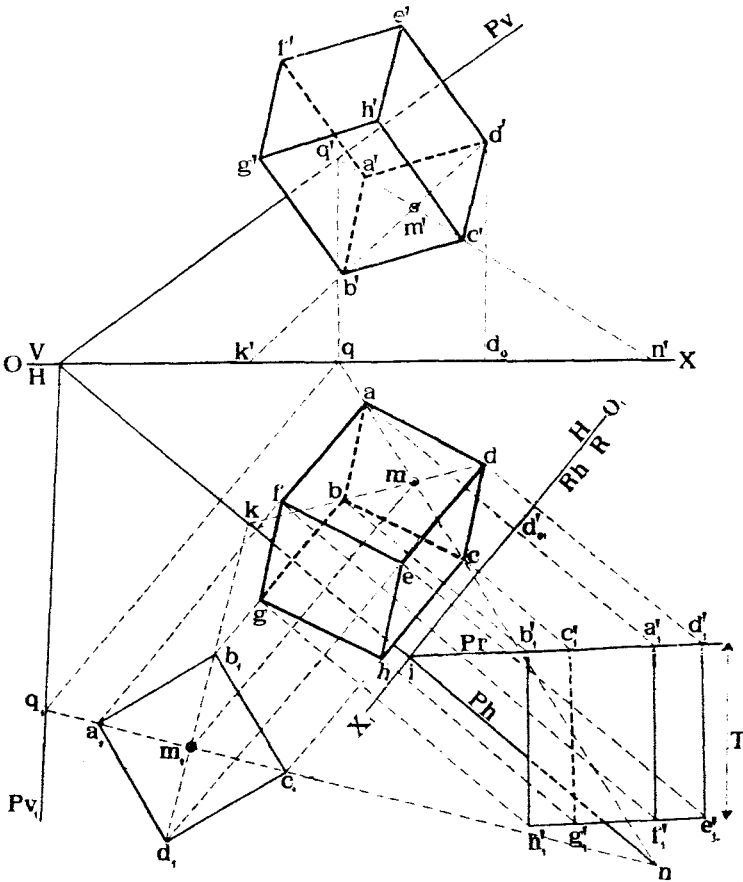
Длина m отрѣзка $o 12_2$ и даетъ возвышеніе точки **12** надъ H . Горизонтальная проекція верхняго основанія изображается правильнымъ

пятиугольникомъ 12345, повернутымъ вокругъ оси JJ додекаэдра относительно нижняго основанія на 180° .

Имѣя эти данныя, нетрудно построить вертикальныя и горизонтальныя проекціи всѣхъ вершинъ и реберъ додекаэдра.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ построения многогранника.

Дана плоскость P (черт. 204) и въ ней линія NQ съ точкой M .



Черт. 204.

Построить прямую призму, стоящую основаніемъ на P . Основаніемъ призмы долженъ быть квадратъ, лежащій въ P , при чемъ діагональ квадрата должна совпадать съ линіей NQ , центръ его долженъ быть въ точкѣ M . Длина стороны квадрата должна равняться данной длинѣ S , а высота призмы должна равняться данной длинѣ T .

Для рѣшенія задачи совмѣщаемъ съ H плоскость P вмѣстѣ съ линіей NQ и точкой M и строимъ въ совмѣщенномъ положеніи квадратъ $a_1b_1c_1d_1$ по данной его сторонѣ.

Возвращаемъ плоскость P въ прежнее положеніе и строимъ проекціи квадрата $a'b'c'd'$ и $abcd$. Такъ какъ призма должна быть прямая, т. е. ребра ея должны быть перпендикулярны къ основанію, то проекціи этихъ реберъ должны быть перпендикулярны къ соответственнымъ слѣдамъ плоскости P . Для опредѣленія верхняго основанія призмы по условію, чтобы высота ея равнялась данной длинѣ T , перемѣнимъ плоскость проекцій V такъ, чтобы въ новой системѣ эта высота проектировалась безъ искаженія.

Выбираемъ новую плоскость проекцій $R \perp Ph$ и проектируемъ основаніе $ARCD$ призмы на R въ линію $a_1'b_1'c_1'd_1'$, совпадающую съ слѣдомъ въ Pr плоскости P . Ребра призмы спроектируются на R безъ искаженія въ видѣ линій перпендикулярныхъ къ Pr . Проводимъ проекцію $n_1'g_1'f_1'c_1'$ верхняго основанія призмы на R въ разстояніи T отъ Pr и находимъ горизонтальныя проекціи, а затѣмъ и вертикальныя на V точки верхняго основанія. Проекціи искомой призмы будутъ $abcdefgh$ и $a'b'c'd'e'f'g'h'$.

Задача № 21. Построить проекціи деревянной стропильной фермы, состоящей изъ двухъ ногъ и затяжки по слѣдующимъ даннымъ.

Тангенсъ угла наклона ногъ къ затяжкѣ, или, какъ говорятъ, уклонъ ногъ, равенъ 0,8. Всѣ части стропиль должны быть сдѣланы отъ брусевъ квадратнаго сѣченія, длина стороны котораго дана (a). Ноги должны пересѣкаться затяжку по внѣшнимъ линіямъ, отстоящимъ отъ концовъ затяжки на разстояніи (a). Полная длина затяжки дана (b).

Рѣшеніе. Согласно вышеприведеннымъ даннымъ строимъ (черт. 205) сначала проекціи затяжки, затѣмъ начиная въ разстояніи (a) отъ концовъ затяжки, проводимъ линіи подъ даннымъ уклономъ (0,8) къ затяжкѣ.

Далѣе вычерчиваемъ проекціи обѣихъ ногъ даннаго поперечнаго сѣченія и проектируемъ сопряженія ногъ между собою и съ затяжкой.

На чертежѣ 205 показаны проекціи обѣихъ ногъ и затяжки отдѣльно, а также, для ясности, изображены детали врубокъ:

A — конецъ затяжки;

B — верхъ лѣвой ноги;

C — верхъ правой ноги;

D — визъ правой ноги (одинаковъ съ низомъ лѣвой ноги).

Задача № 22. На чертежѣ 206 изображена насыпь желѣзнодорожнаго полотна съ верхней горизонтальной площадкой. Ось полотна $S'S'$. Требуется спроектировать насыпь шоссе для переѣзда черезъ желѣзную дорогу по слѣдующимъ даннымъ:

Уголъ наклона въѣздовъ оси шоссе къ горизонту долженъ быть равенъ α .

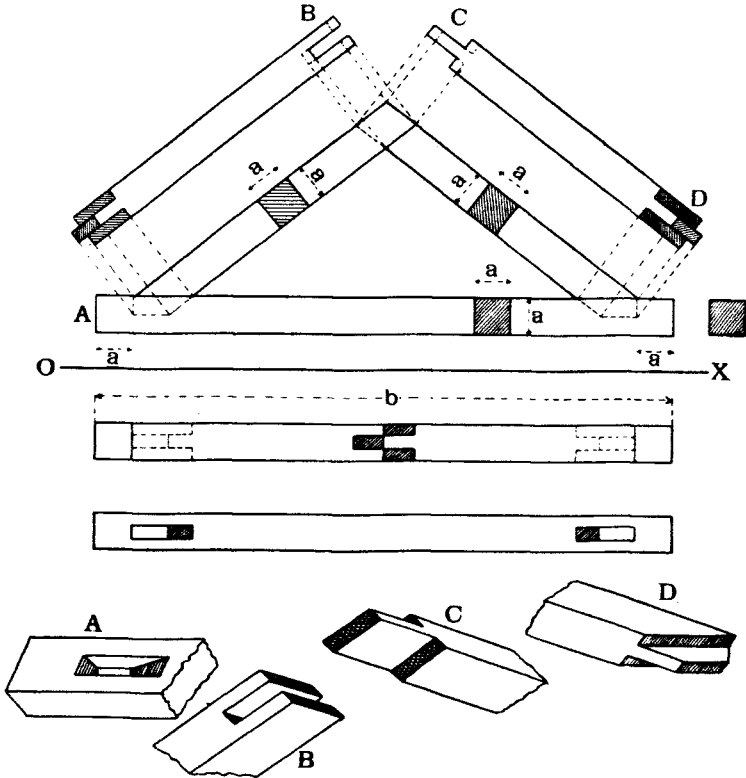
Ось шоссе должна въ плавѣ составлять съ осью желѣзной дороги уголъ β и пересѣкаться ее въ точкѣ D .

Тангенсъ угла наклона откосовъ шоссе равенъ 1.

Ширина шоссе по верху t . Поверхность земли принимается горизонтальной.

Рѣшеніе. Проводимъ черезъ d ось cs_1 шоссе подъ угломъ β къ оси ss_1 желѣзной дороги. Далѣе, проводимъ въ планѣ двѣ линіи hq и in , параллельныя cs_1 , на разстояніи отъ нея $\frac{t}{2}$. Эти линіи изобразятъ въ планѣ бровки шоссе.

Замѣчаемъ точку q пересѣченія бровки hq съ бровкой qa желѣзнодорожного полотна и проводимъ $qn \perp cs_1$ до пересѣченія съ другой бровкой шоссе въ точкѣ n . Предполагаемъ, что часть qno является горизонтальной проекціей уширенія горизонтального полотна желѣзной дороги.



Черт. 205.

Такимъ образомъ мы считаемъ, что линіи QN и NO въ пространствѣ горизонтальны.

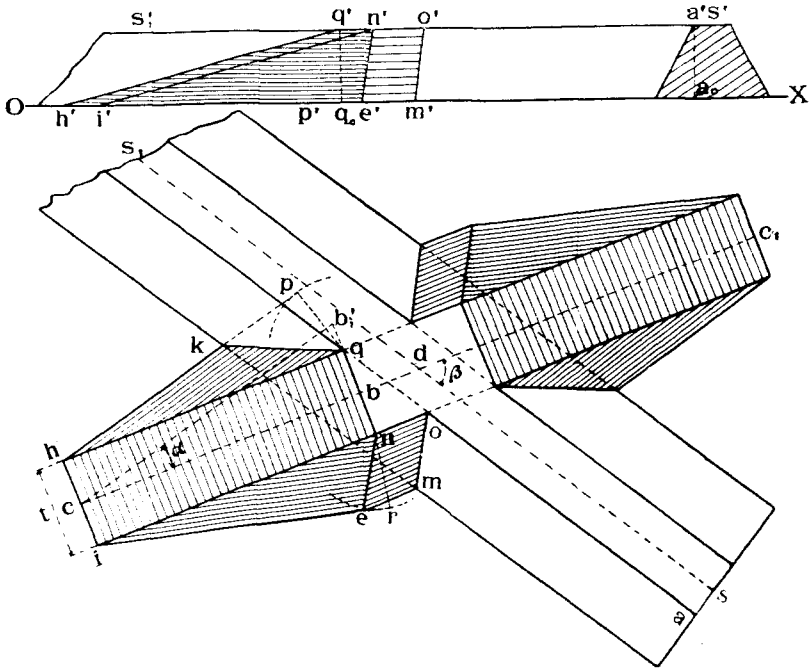
Найдемъ теперь линію сѣченія полотна шоссе съ поверхностью земли. Совмѣщаемъ съ H вертикальную плоскость, проектирующую ось шоссе на H , вращая ее вокругъ линіи cb .

Тогда точка B пересѣченія оси шоссе съ линіей QN спроектируется въ точку b_1' , причемъ $bb_1' \perp cb$ и $bb_1' = a'a_0$ — высотъ желѣзнодорожной насыпи. Проведемъ изъ b_1' линію подъ угломъ α къ cb , получимъ точку s , въ которой ось шоссе пересѣкаетъ поверхность земли. Проводимъ $shi \perp cb$ до пересѣченія съ проекціями hq и in бровокъ шоссе. Линія hi и будетъ служить пересѣченіемъ полотна шоссе съ землею. Найдемъ теперь линіи сѣченія откосовъ шоссе съ землею. Такъ какъ тангенсъ угла наклона откосовъ шоссе равенъ единицѣ, то описываемъ изъ точекъ q

и n дуги круговъ радиусами

$$qp = nr = a'a_0$$

и проводимъ изъ точекъ h и i линіи касательныя къ соответственнымъ дугамъ въ точкахъ p и r .



Черт. 206.

Линіи hp и ir будутъ служить слѣдами откосовъ шоссе на землѣ. Дѣйствительно, уголъ между каждымъ откосомъ, напримѣръ, hpq и землей измѣряется въ плоскости перпендикулярной къ ребру hp въ какой-нибудь точкѣ p . Эта плоскость пересѣчетъ землю и откосъ по линіямъ pq и pQ . Точки Q , q и p образуютъ въ пространствѣ прямоугольный треугольникъ Qqp , у котораго катеты равны другъ другу, т. е.

$$qp = qQ = q_0q'$$

Тангенсъ же угла при вершинѣ p въ такомъ треугольникѣ равенъ единицѣ, что и требовалось показать. Точка K пересѣченія слѣдовъ откосовъ шоссе и желѣзной дороги и точка Q опредѣляютъ линію сѣченія самихъ откосовъ шоссе и желѣзной дороги.

Предположимъ теперь, что откосъ проходящій черезъ бровку NO площадки имѣетъ тотъ же уклонъ, какъ и откосы желѣзнодорожной насыпи. Тогда горизонтальная проекція линіи сѣченія откосовъ площадки и желѣзнодорожной насыпи пойдетъ по биссектрисѣ угла noa , и точка $M(m)$ будетъ служить точкой пересѣченія слѣдовъ этихъ откосовъ. Слѣдъ me откоса площадки пойдетъ по линіи параллельной no . Замѣчаемъ точку e пересѣченія слѣдовъ ir и me .

Линія $NE(ne)$ будетъ служить пересѣченіемъ откосовъ площадки и шоссе. Построивъ такимъ образомъ линіи сѣченія въѣзда на желѣзную дорогу съ послѣдней, строимъ таковыя же линіи для сѣзда, которыя располагаются симметрично съ ранѣе построенными.

§ 15. ТѢНИ МНОГОГРАННИКОВЪ.

а) *Общія понятія.*

Построеніе тѣней имѣетъ значеніе главнымъ образомъ для приданія чертежу наглядности изображенія.

Извѣстно, что сила освѣщенія какой-нибудь поверхности зависитъ отъ угла наклона свѣтовыхъ лучей къ освѣщаемой поверхности. Кромѣ того, она зависитъ еще отъ свойства окружающей атмосферы. Чѣмъ дальше источникъ свѣта отъ освѣщаемой поверхности, тѣмъ слабѣе послѣдняя освѣщается, и эта зависимость между силой свѣта и разстояніемъ источника свѣта отъ освѣщаемой точки выражается такимъ закономъ: сила свѣта у какой-нибудь точки обратно пропорціональна квадратамъ разстояній источника свѣта отъ этой освѣщаемой точки.

Мы будемъ пока разсматривать вопросъ исключительно съ геометрической точки зрѣнія, независимо отъ угла наклона лучей свѣта къ освѣщаемой поверхности, предполагая вообще, что на какую бы грань предмета свѣтъ ни падалъ, онъ освѣщаетъ ее равномерно, иными словами, мы будемъ разсматривать построеніе тѣней, не касаясь физической стороны явленія.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ различать *тѣни собственные* и *тѣни падающія*. *Собственной тѣнью* называется такая, которая получается на неосвѣщенной части поверхности предмета. *Падающей тѣнью* называется та, которая падаетъ отъ предмета на какую-нибудь поверхность.

При построеніи тѣней мы будемъ предполагать, что лучи свѣта параллельны другъ другу.

Направленіе лучей свѣта въ техническихъ чертежахъ, составленныхъ въ ортогональныхъ проекціяхъ, обыкновенно принимается параллельнымъ діагонали куба PP_1 , прислоненнаго двумя гранями къ плоскостямъ проекцій (черт. 207), и лучи идутъ слѣва, сверху, сзади—вправо, внизъ, впередъ.

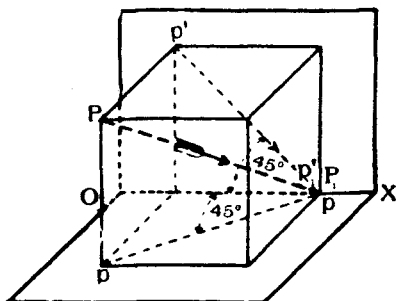
При такихъ условіяхъ направленіе лучей изобразится въ проекціяхъ согласно чертежу 208, при чемъ эти проекціи луча будутъ составлять съ осью OX углы въ 45° .

Пусть дано въ пространствѣ какое-нибудь тѣло $SABCT$ (черт. 209) и направленіе лучей свѣта PP' . Проведемъ черезъ вершины тѣла лучи, параллельные PP_1 и построимъ точки пересѣченія ихъ съ плоскостями проекцій.

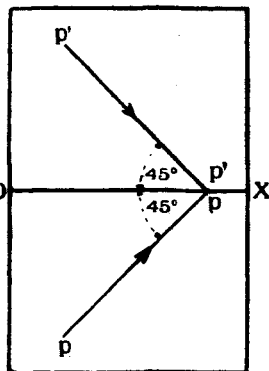
Нѣкоторые изъ этихъ лучей могутъ пересѣчь сначала переднюю полу V , а потомъ нижнюю полу V , другіе же наоборотъ, могутъ пересѣчь сначала верхнюю полу V , а потомъ заднюю полу H .

Мы считаемъ видимыми лишь тѣ точки, которыя лежатъ въ предѣлахъ 1-го угла пространства и на верхней полѣ V и на передней H . Точки пересѣченія лучей съ этими полами V и H будутъ служить тѣнями отъ соответственныхъ вершинъ даннаго тѣла.

Точка a_0 будетъ тѣнью отъ A на H
 » b_0 » » » B » »
 » c_0' » » » C на V .

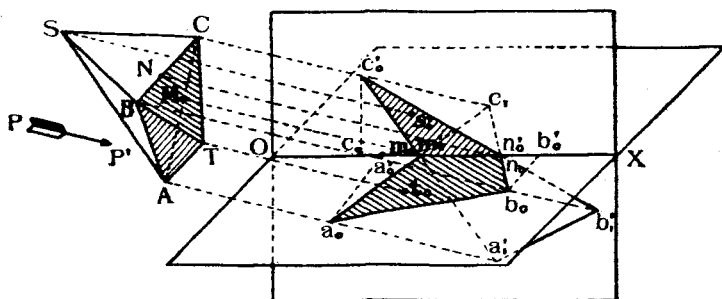


Черт. 207.



Черт. 208.

Совокупность лучей, проходящихъ черезъ ребро AB тѣла образуетъ плоскость, параллельную PP' . Эта плоскость пересѣчетъ H по линіи a_0b_0 , которая будетъ служить тѣнью ребра AB .



Черт. 209.

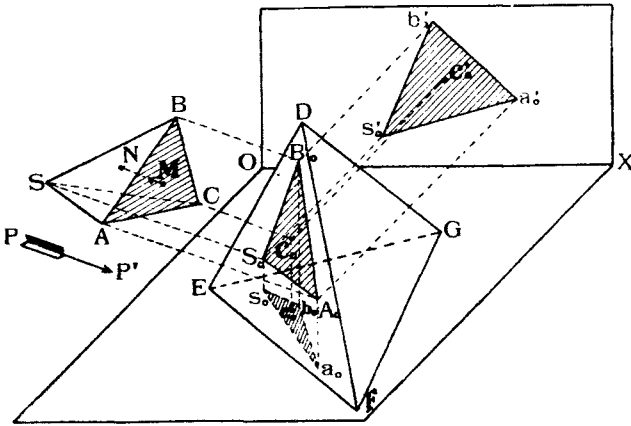
Подобнаго же рода плоскости образуютъ лучи, проходящіе черезъ ребра AC и BC . Линіи свѣченія этихъ плоскостей съ плоскостями проекцій будутъ являться тѣнями отъ реберъ AC и BC . Въ данномъ случаѣ тѣни отъ прямыхъ линій AC и BC получились ломаными $a_0m_0c_0'$ и $b_0n_0c_0'$, такъ какъ часть тѣни отъ каждаго изъ этихъ реберъ падаетъ на H и часть на V .

Линія $a_0b_0n_0m_0a_0$ называется *контуромъ тѣни, падающей отъ тѣла на H* , а линія $n_0c_0'm_0n_0$ — *контуромъ тѣни, падающей отъ тѣла на V* .

Каждый изъ этихъ контуровъ, являясь фигурой, лежащей на одной изъ плоскостей проекцій, будетъ имѣть вторую проекцію совпадающую съ осью.

Такъ, проекціи тѣни, падающей на H , будутъ $a_0m_0n_0b_0$ и $a_0'm_0'n_0'b_0'$, а падающей на V — $m_0'c_0'n_0'$ и $m_0c_0n_0$.

Совокупность лучей проведенныхъ черезъ точки тѣла $SABCT$ образуютъ нѣкоторую призму, поверхность которой, пересѣкаясь съ плоскостями проекцій, и даетъ контуръ падающей тѣни. Поверхность этой же призмы какъ бы обертываетъ тѣло $SABCT$ по линіи ABC , которая



Черт. 210.

является границей освѣщенной части $SABC$ поверхности тѣла отъ неосвѣщенной $TABC$.

Линія ABC соприкосанія обертывающей лучевой призмы съ даннымъ тѣломъ называется *контуромъ собственной тѣни* тѣла. Очевидно, контуръ падающей тѣни отъ тѣла является тѣнью отъ контура собственной его тѣни.

Разсматривая линіи $a_0c_1b_0$ и $a_1'c_0'b_1'$ сѣченія поверхности лучевой призмы съ V и H , нетрудно замѣтить, что обѣ эти фигуры пересѣкаются въ точкахъ m_0m_0' и n_0n_0' , служащими точками перелома на оси OX видимыхъ частей тѣней. Это свойство помогаетъ иногда рѣшенію задачи на построеніе тѣней отъ тѣла, падающихъ на V в H .

Если тѣнь отъ одного тѣла, напримѣръ $SABC$ (черт. 210) падаетъ на другое $DEFG$, то контуръ падающей тѣни получится, какъ линія пересѣченія лучевой призмы, обертывающей тѣло $SABC$, съ пирамидой $DEFG$. Контуръ $A_0B_0S_0$ этой тѣни, какъ фигура, лежащая въ про-

странствѣ, должна имѣть двѣ проекціи, горизонтальную $a_0b_0s_0$ и вертикальную $a_0'b_0's_0'$.

Замѣтимъ, что эти двѣ фигуры являются не двумя тѣнями отъ тѣла $SABC$, а лишь двумя проекціями одной и той же тѣни $A_0B_0S_0$.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что задача на построение тѣней падающихъ отъ даннаго тѣла на V , H или на какую-нибудь другую плоскость или на другое тѣло сводится къ задачѣ на пересѣченіе призмы, обертывающей данное тѣло, съ той поверхностью, на которой желаютъ опредѣлить падающую тѣнь, т. е. въ общемъ случаѣ построение падающихъ тѣней сводится къ задачѣ на пересѣченіе многогранниковъ другъ съ другомъ, каковая задача была нами уже разсмотрѣна.

Для построения лучевой призмы, обертывающей данное тѣло, слѣдуетъ сначала опредѣлить контуръ его собственной тѣни. Для этого сначала опредѣляютъ, какія его грани освѣщены, и какія неосвѣщены.

Чтобы узнать, будетъ ли какая-нибудь грань ADC даннаго тѣла освѣщена или нѣтъ, слѣдуетъ взять на этой грани случайную точку M и провести черезъ нее лучъ MN навстрѣчу къ источнику свѣта. Если этотъ лучъ на своемъ пути пересѣчетъ какую-нибудь грань тѣла въ точкѣ N , то послѣдняя заградитъ доступъ свѣта къ точкѣ M , и точка M , а слѣдовательно, и вся грань ABC будетъ въ собственной тѣни.

Если же лучъ, проведенный изъ точки M по направленію къ источнику свѣта, не пересѣчетъ ни одной грани тѣла, то точка M , а слѣдовательно, и грань ABC , были бы освѣщенными.

Можно было бы подобный же лучъ провести и черезъ вершину C тѣла. Въ нашемъ случаѣ этотъ лучъ пересѣкъ бы одну изъ граней тѣла $SABC$, что указало бы, что точка C , а, слѣдовательно, и грани SAC , SBC и ABC тѣла, сходящіяся въ этой точкѣ, неосвѣщены.

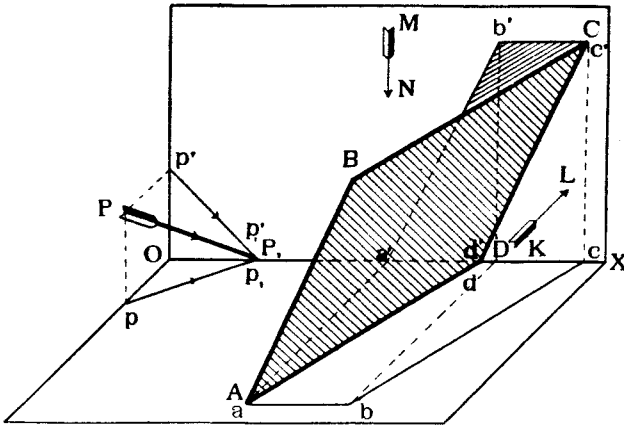
Разсмотримъ теперь, какъ узнать, какая изъ сторонъ плоской фигуры, находящейся въ пространствѣ, будетъ проектироваться на плоскости проекцій освѣщенной, и какая—неосвѣщенной, и условимся въ дальнѣйшемъ изображать проекціи видимыхъ неосвѣщенныхъ сторонъ плоскости заштрихованными.

На чертежѣ 211 изображена въ пространствѣ плоская фигура $ADCD$ и показаны ея проекціи $abcd$ и $a'b'c'd'$.

При направленіи лучей свѣта PP , будетъ освѣщена лѣвая сторона плоскости $ADCD$, правая же будетъ въ собственной тѣни.

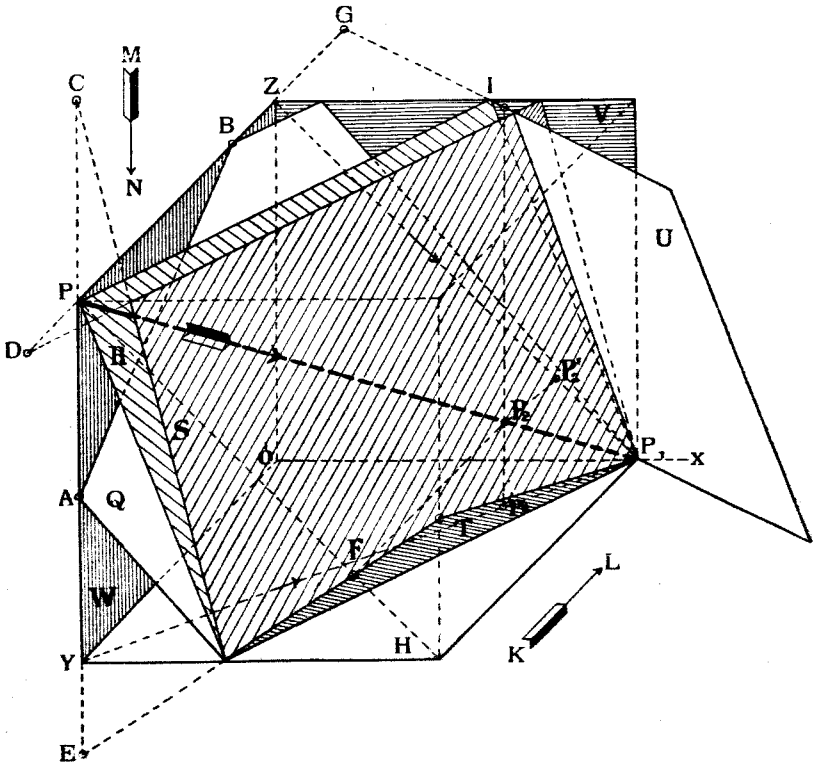
При проектированіи $ABCD$ на H , и при направленіи лучей зрѣнія по MN зритель будетъ видѣть освѣщенную сторону $ABCD$, и потому проекція $abcd$ этой стороны на H не будетъ заштрихована. При проектированіи же фигуры $ABCD$ на V и при направленіи лучей зрѣнія KL зритель будетъ видѣть тѣневую сторону фигуры $ADCD$, и потому проекція $a'b'c'd'$ этой стороны на V должна быть заштрихована.

На черт. 212 показаны различные случаи расположенія плоских фигуръ относительно луча свѣта PP_1 , и плоскостей проекцій.



Черт. 211.

Плоскость Q имѣетъ верхнюю сторону освѣщенной и въ проекціяхъ



Черт. 212.

на H и V будетъ казаться освѣщенной, почему обѣ проекціи ея не будутъ заштрихованы.

Плоскость R совпадаетъ съ лучемъ PP_1 , иными словами лучъ свѣта скользитъ вдоль плоскости R . Условимся считать обѣ стороны такой плоскости неосвѣщенными. При такихъ условіяхъ обѣ проекціи этой плоскости должны быть заштрихованы.

Плоскость S расположена выше луча PP_1 . Лѣвая нижняя сторона ея будетъ освѣщена, правая же верхняя — въ тѣни. При направленіи лучей зрѣнія перпендикулярно къ H или къ V зритель увидитъ лишь неосвѣщенную сторону плоскости S и потому обѣ проекціи ея должны быть заштрихованы.

Плоскость T верхней своей стороной обращена къ свѣту. При направленіи лучей зрѣнія перпендикулярно къ H , зритель увидитъ освѣщенную сторону T и потому проекція T на H не будетъ заштрихована. При направленіи же лучей зрѣнія перпендикулярно къ V зритель увидитъ тѣневую сторону T , и потому проекція T на V должна быть заштрихована.

Плоскость U расположена лѣвой нижней стороной къ свѣту, поэтому ея лѣвая нижняя сторона будетъ освѣщена, а правая верхняя — въ тѣни. При направленіи лучей зрѣнія $\perp H$, зритель увидитъ неосвѣщенную сторону U , поэтому проекція U на H должна быть заштрихована. При направленіи же лучей зрѣнія $\perp V$, зритель увидитъ освѣщенную сторону U , и потому проекція U на V не будетъ заштрихована.

Для того, чтобы умѣть опредѣлять геометрически, какая сторона какой плоскости будетъ казаться освѣщенной или въ тѣни, если смотрѣть на H или на V , примѣнимъ слѣдующій пріемъ.

Замѣтимъ точку пересѣченія P_1 луча съ разсматриваемой плоскостью. Затѣмъ выберемъ на этомъ лучѣ точку P *влево* отъ точки P_1 , т. е. въ направленіи къ источнику свѣта.

Опустимъ изъ точки P перпендикуляры на H и на V и найдемъ ихъ точки пересѣченія съ разсматриваемой плоскостью.

Если точка пересѣченія данной плоскости съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ P на H , будетъ ниже P , то на H будетъ проектироваться видимая освѣщенная сторона плоскости.

Если же эта точка пересѣченія будетъ выше P , то на H будетъ проектироваться видимая неосвѣщенная сторона плоскости.

Если точка пересѣченія перпендикуляра, опущеннаго изъ P на V , съ данной плоскостью будетъ ближе къ V нежели P , то на V будетъ проектироваться видимая освѣщенная сторона плоскости.

Если же эта точка пересѣченія будетъ дальнѣе отстоять отъ V , нежели P , то на V будетъ проектироваться видимая неосвѣщенная сторона плоскости.

Обращаясь къ чертежу 212, получаемъ, согласно вышеприведенному правилу слѣдующее:

Перпендикуляръ, опущенный изъ P на H встрѣчаетъ плоскость Q въ точкѣ A , причеъ $AU < PY$. Поэтому Q будетъ казаться освѣщенной, если смотрѣть на H . Опустимъ теперь перпендикуляръ изъ P на V и найдемъ точку B его пересѣченія съ Q . Такъ какъ $BZ < PZ$, то Q будетъ казаться освѣщенной, если смотрѣть на V^1).

Подобнымъ же образомъ опущены изъ P перпендикуляры на H и V и найдены точки E, C, G, D ихъ пересѣченія съ плоскостями S, T и U . Такъ какъ точка пересѣченія перпендикуляра изъ P на H съ плоскостью U и точка пересѣченія перпендикуляра изъ P на V съ плоскостью T въ нашемъ случаѣ располагается внѣ предѣловъ чертежа, то вмѣсто P выбираемъ на лучѣ PP_1 точку P_2 влево отъ P_1 , и проводимъ изъ P_2 эти перпендикуляры до пересѣченія съ T въ точкѣ E и съ U въ точкѣ I .

Далѣе, легко составить слѣдующую табличку, обозначая стороны плоскостей, которыя кажутся освѣщенными на H или V знакомъ $+$, неосвѣщенными знакомъ $-$, и по которымъ лучъ скользить, знакомъ 0 .

Плоскости.	Результаты построеній.	Видимость на H .	Видимость на V .
Q	$AU < PY; BZ < PZ$	$+$	$+$
R	$PY = PY; PZ = PZ$	0	0
S	$CY > PY; DZ > PZ$	$-$	$-$
T	$EY < PY; Fp_2' > P_2p_1'$	$+$	$-$
U	$I p_2 > P_2 p_2; GZ < PZ$	$-$	$+$

Примечаніе. Можно было бы точку P или P_2 на лучѣ брать и справа отъ точки P_1 пересѣченія луча съ разсматриваемой плоскостью, но тогда разстоянія до H или V точекъ пересѣченія перпендикуляровъ изъ P или P_2 съ разсматриваемой плоскостью соответственно должны были бы быть не меньше, а больше разстояній P или P_2 до V и H , для того, чтобы имѣли мѣсто вышеупомянутыя условія видимости сторонъ плоскостей.

б) Тѣни отъ точекъ, линій и плоскихъ фигуръ.

На черт. 213 показаны построеніе тѣней на плоскостяхъ проекцій отъ точки A , отъ прямой $CB \perp H$ и отъ случайной прямой DE .

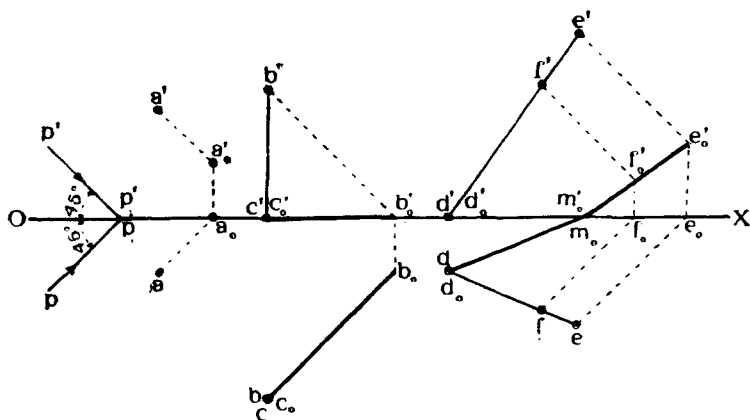
¹⁾ Разстояніе точекъ саади V или ниже H считаемъ отрицательными и всегда меньшими положительныхъ разстояній точки P до V или до H .

Для построения тѣни отъ точки A при данномъ направленіи лучей свѣта PP_1 , проводимъ черезъ A лучъ, параллельный PP_1 , и находимъ ближайшую къ A точку A_0 пересѣченія его съ плоскостью проекцій. Въ данномъ случаѣ лучъ сначала встрѣчаетъ плоскость V , а потомъ уже H . Поэтому слѣдъ A_0 луча на V и будетъ служить тѣнью отъ A на V .

Для построения тѣни отъ прямой $BC \perp H$, находимъ точку B_0 , тѣнь отъ B на H , и соединяемъ B_0 съ C_0 , которая, являясь тѣнью отъ C , совпадаетъ съ C . Линія C_0B_0 и будетъ тѣнью отъ BC на H .

Строимъ тѣнь отъ линіи BE на V и H .

Тѣнью будетъ служить линія сѣченія V и H съ плоскостью, проходящей черезъ DE и параллельной лучу свѣта. Находимъ точку E_0 , тѣнь отъ E на V .



Черт. 213.

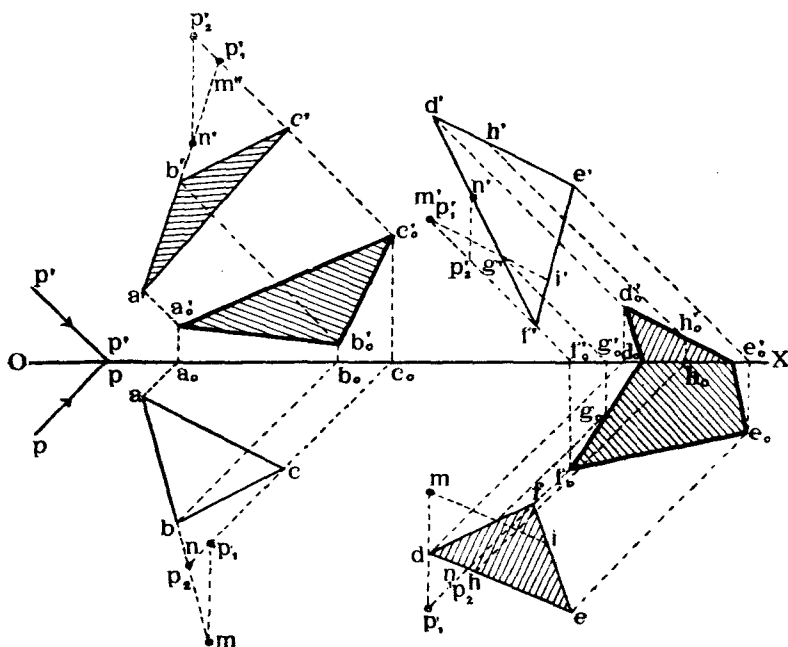
Тѣнь D_0 отъ точки D , лежащей на H , совпадаетъ съ самой точкою D .

Такъ какъ часть тѣни падаетъ на V , а часть на H , т. е. тѣнь получается ломаной, то для опредѣленія ея построимъ тѣнь E_0 отъ какой нибудь точки F прямой. Соединяемъ e_0' съ f_0' и продолжаемъ линію $e_0'f_0'$ до пересѣченія съ OX въ точкѣ m_0m_0' . Точка M_0 будетъ точкой перелома тѣни. Окончательно тѣнью DE будетъ линія $B_0M_0E_0$.

На черт. 214 показано построение тѣней отъ двухъ треугольниковъ ABC , отъ котораго тѣнь падаетъ лишь на V , и DEF , отъ котораго тѣнь падаетъ на V и H . Для построения тѣней отъ треугольниковъ строимъ послѣдовательно тѣни отъ сторонъ ихъ такъ, какъ показано было на чертежѣ 213. На черт. 214 проекціи падающихъ тѣней заштрихованы.

Опредѣлимъ теперь собственныя тѣни данныхъ плоскихъ фигуръ сначала ABC , а потомъ DEF .

Проводимъ черезъ точку C фигуры ABC лучъ и беремъ на немъ слѣва отъ C точку P_1 . Опускаемъ изъ P_1 перпендикуляръ къ V и находимъ точку M пересѣченія его съ ABC . Такъ какъ M лежитъ дальше отъ V нежели P_1 , то, если смотрѣть на V , будетъ видна неосвѣщенная сторона фигуры ABC . Поэтому $a'b'c'$ заштриховано.



Черт. 214.

Беремъ теперь еще точку P_2 на лучѣ слѣва отъ C , проводимъ черезъ P_2 перпендикуляръ къ H и находимъ точку N пересѣченія его съ ABC . Такъ какъ P_2 лежитъ выше H_1 , нежели N , то зрителю, смотрящему на H , будетъ видна освѣщенная сторона фигуры ABC . Поэтому abc не заштрихована.

Подобнымъ же образомъ проводимъ перпендикуляры къ V и къ H черезъ точки P_1 и P_2 на лучѣ P_1P_2F , проходящемъ черезъ точку F фигуры $DEFGHI$ (черт. 214), и находимъ точки M и N пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ плоскостью DEF . Такъ какъ точка N выше P_2 , то def должно быть заштриховано. Вертикальная же проекція $d'e'f'$ не штрихуется, такъ какъ M ближе къ V , нежели P_1 .

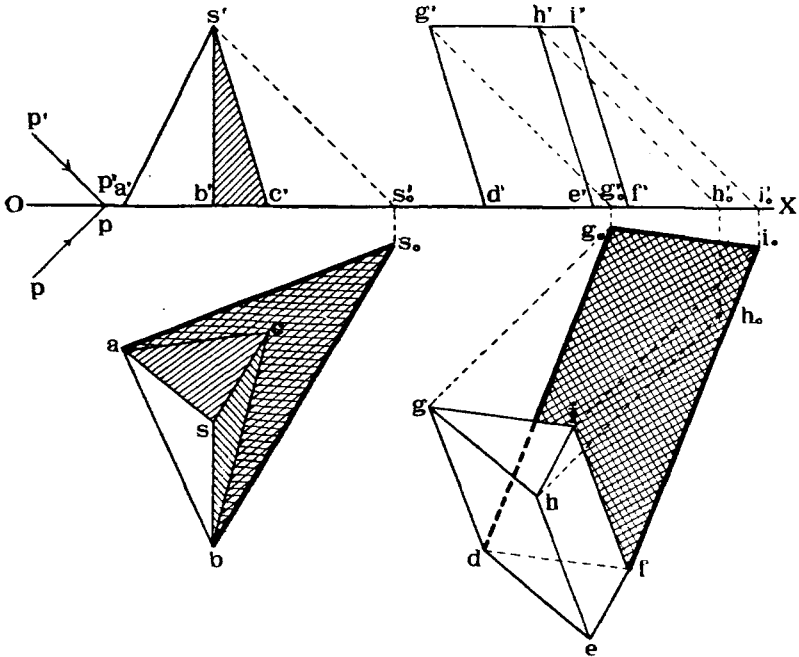
с) Тѣни многогранниковъ.

На черт. 215 показано построение тѣней отъ пирамиды $SABC$ и призмы $DEFGHI$, стоящихъ на H .

Тѣнь отъ пирамиды получаемъ слѣдующимъ образомъ:

Строимъ тѣнь S_0 отъ вершины S и соединяемъ S_0 съ a и b . Линія as_0b и будетъ контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на H . Грани пирамиды ASC и BSC будутъ въ собственной тѣни.

Для построения тѣни отъ призмы, проводимъ черезъ вершины ея G и I лучи и находимъ точки G_0 и I_0 пересѣченія ихъ съ H . Фигура dg_0i_0f и будетъ тѣнью, падающей отъ призмы на H .



Черт. 215.

Рѣшимъ въ качествѣ примѣра еще такую задачу. Дана пирамида $SABC$ и плоскость P (черт. 216). Построить собственныя и падающія тѣни.

Находимъ сначала точку **3** пересѣченія ребра SC пирамиды съ P , для чего служить вспомогательная линія **12** сѣченія P съ плоскостью, проектирующей SC на H .

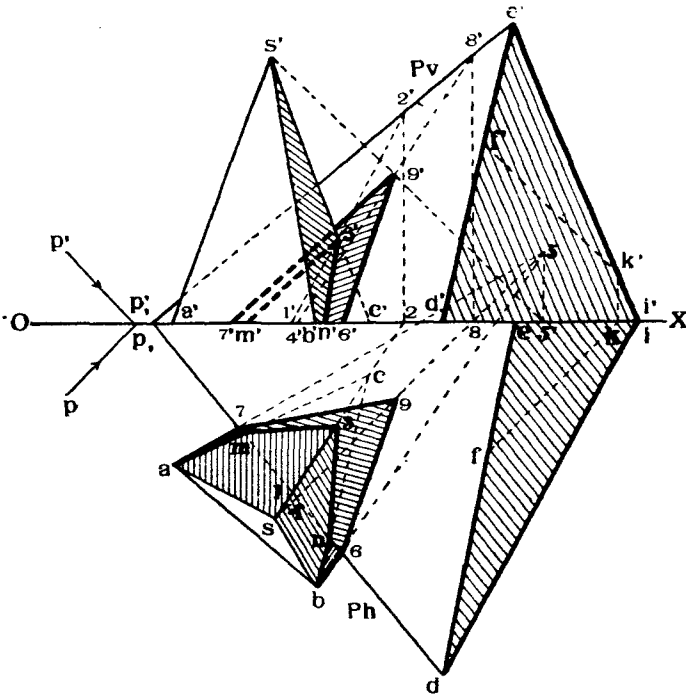
Замѣчаемъ точки M и N сѣченія сторонъ AC и BC основанія пирамиды со слѣдомъ Ph .

Линія $M3N$ будетъ служить линіей сѣченія пирамиды съ плоскостью P . Строимъ тѣнь **5** отъ вершины S на заднюю полу H и соединяемъ точку **5** съ A и B .

Части $a7$ и $b6$ линій $a5$ и $b5$ отъ точекъ a и b до точекъ 7 и 6 пересѣченія $a5$ и $b5$ съ Ph будутъ служить видимыми тѣнями отъ реберъ SA и SB на H .

Находимъ теперь тѣнь отъ вершины S на плоскость F . Проводимъ черезъ S лучъ $S5$ и определяемъ точку 9 пересѣченія его съ P . Для этого служить вспомогательная линія 48 свѣченія P съ плоскостью, проектирующей лучъ $S5$ на B .

Точка 9 и будетъ служить тѣнью отъ S на P . Соединяемъ точки 7 и 6 съ точкою 9 . Линіи 79 и 69 будутъ служить тѣнями отъ реберъ AS и BS на P .



Черт. 216.

Контуромъ падающей тѣни отъ пирамиды на H и P будетъ являться линія $A796B$.

Въ собственной тѣни будутъ грани SAC я SDC .

Построимъ теперь тѣнь отъ линіи DE плоскости P . Для этого выбираемъ на DE случайную точку F и определяемъ тѣнь K отъ нея на V . Соединяя k' съ e' , получаемъ линію $e'k'i'$ тѣнь отъ DE на V . Линія же di будетъ тѣнью отъ DE на H . Тѣни отъ P на V и H на чертежѣ 216 заштрихованы.

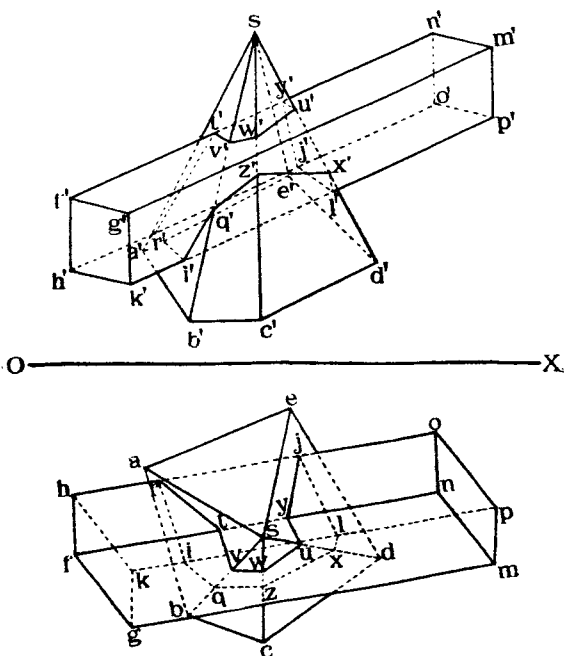
Перейдемъ теперь къ общему случаю построения тѣней для двухъ пересѣкающихся многогранниковъ.

Пусть даны (чертежъ 217) два пересѣкающихся многогранника: пирамида $SABCDE$ и призма $FGKHNMP$, и построена линия $RIQZZXLJYUWVT$ ихъ сѣченія.

Требуется построить тѣни.

Задачу эту раздѣляемъ на слѣдующія части:

- 1) Опредѣленіе собственныхъ тѣней призмы.



Черт. 217.

- 2) Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на V и H .
- 3) Опредѣленіе собственныхъ тѣней пирамиды.
- 4) Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на V и H .
- 4) Построеніе тѣней, падающихъ отъ пирамиды на призму.
- 6) Построеніе тѣней, падающихъ отъ призмы на пирамиду.
1. Опредѣленіе собственныхъ тѣней призмы.

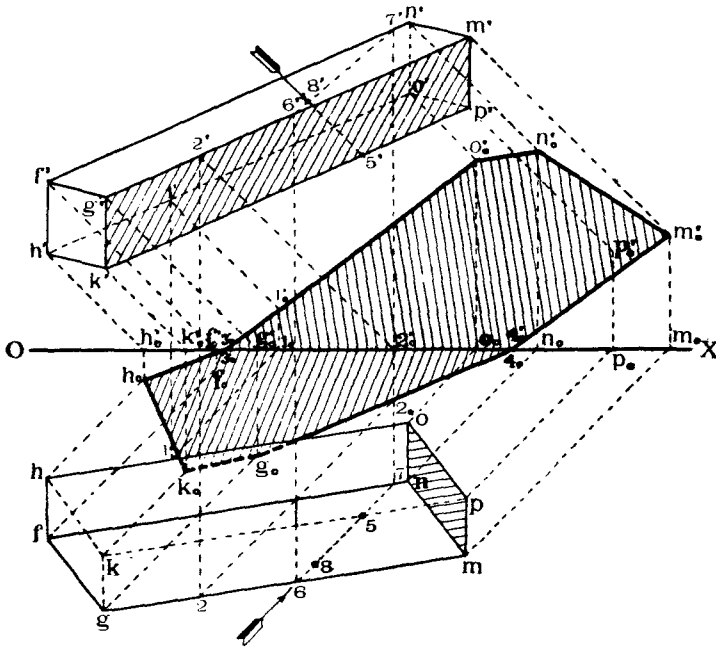
Проводимъ черезъ точку **5** ребра KP призмы (черт. 218) лучъ, и опредѣляемъ точку **8** пересѣченія его съ призмой. Для этого служитъ вспомогательная линия сѣченія **67** грани $FGMN$ съ плоскостью, проектирующей лучъ на H .

Такъ какъ точка **8** лежитъ ближе къ источнику свѣта, нежели точка **5**, то послѣдняя будетъ въ собственной тѣни, а слѣдовательно, въ тѣни будутъ и ребро KP и грани $GKPM$ и $HKPO$.

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить, что въ собственной тѣни будетъ находиться и грань $MNOP$ призмы. Контуромъ собственной тѣни призмы будетъ служить линия $GKHONMG$.

2. Построение тѣней, падающихъ отъ призмы на V и H .

Контуромъ тѣни, падающей отъ призмы на V и H будетъ служить тѣнь отъ контура собственной тѣни призмы, т. е. отъ линіи $GKHONMG$ (черт. 218). Строимъ тѣни отъ точекъ этой линіи, какъ это было уже



Черт. 218.

ранѣе объяснено для линіи DE на черт. 213, и соединяемъ полученныя точки между собою. Линія $G_0K_0H_0O_0N_0M_0G_0$ будетъ служить контуромъ падающей тѣни, часть которой располагается на H , а часть на V .

3. Опредѣленіе собственныхъ тѣней пирамиды.

Эта задача рѣшается такъ же, какъ и для призмы. Въ нашемъ случаѣ въ тѣни оказывается лишь ребро DE пирамиды и грани ея $ADCDE$ и SDE (черт. 219). Контуромъ собственной тѣни пирамиды будетъ служить линія $SEABCS$.

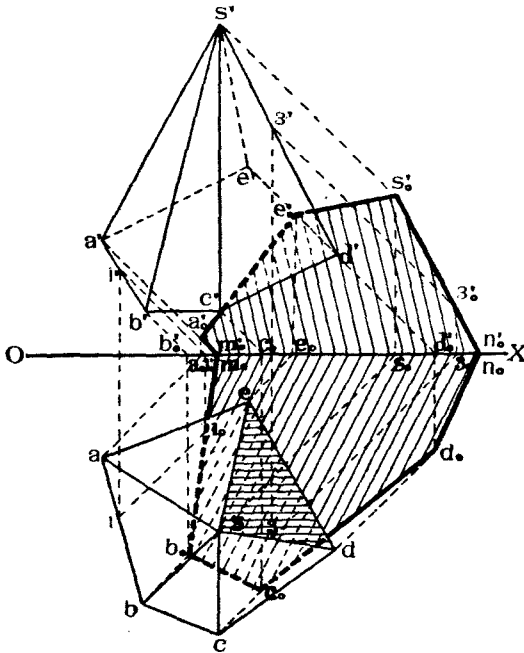
4. Построение тѣней, падающихъ отъ пирамиды на V и H .

Контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на V и H будетъ служить (черт. 219) тѣнь отъ контура собственной тѣни пирамиды, т. е. отъ ли-

ни $SEADCDS$. Строимъ тѣнь $S_0E_0A_0M_0B_0C_0D_0N_0S_0$ отъ этой линіи. Часть тѣни, падающей отъ пирамиды, будетъ на V и часть на H .

5. Построение тѣней, падающихъ отъ пирамиды на призму.

Этой тѣнью, очевидно, будетъ служить тѣнь, падающая на призму отъ контура $SEABCDS$ собственной тѣни пирамиды (черт. 220). Въ частности же на призму будетъ падать лишь тѣнь отъ части SU ребра SD пирамиды.



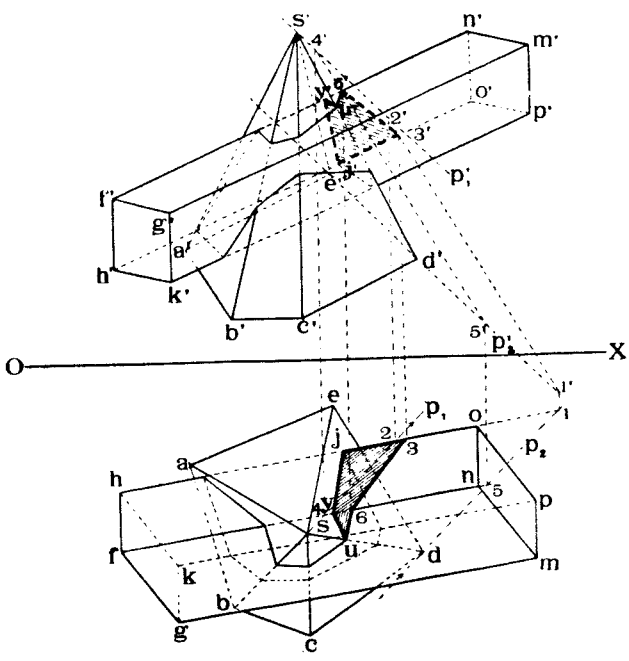
Черт. 219.

Проведемъ черезъ точки S и D ребра SD лучи SP_1 и DP_2 , найдемъ пересѣченіе реберъ HO и FN призмы съ лучевой плоскостью SDP_1P_2 . Ребро HO пересѣчетъ эту плоскость въ точкѣ 3 , для построения котораго служитъ вспомогательная линія 12 сѣченія лучевой плоскости съ плоскостью, проектирующей ребро HO на горизонтальную плоскость проекцій. Ребро FN пересѣчетъ лучевую плоскость въ точкѣ 6 , для построения которой служитъ вспомогательная линія 45 сѣченія лучевой плоскости съ плоскостью, проектирующей ребро FN на H .

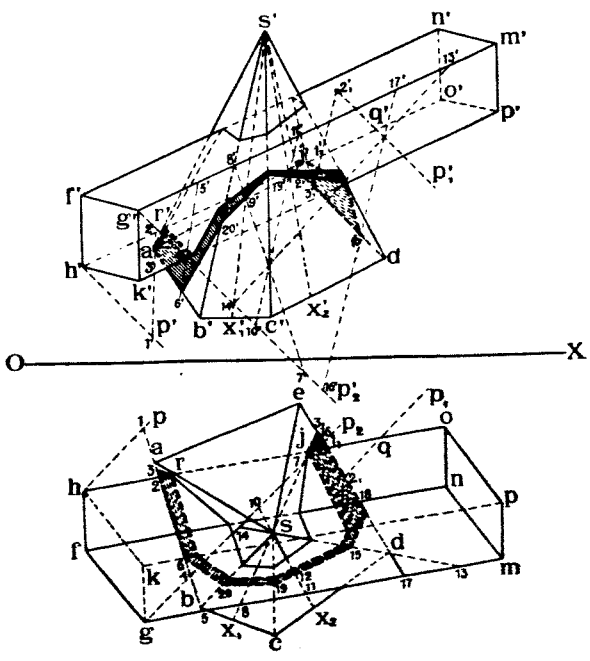
Линія $UVJ36U$ и будетъ служить контуромъ тѣни, падающей отъ пирамиды на призму.

6. Построение тѣней, падающихъ отъ призмы на пирамиду (черт. 221).

Контуромъ тѣни, падающей отъ призмы на пирамиду будетъ служить



Черт. 220.



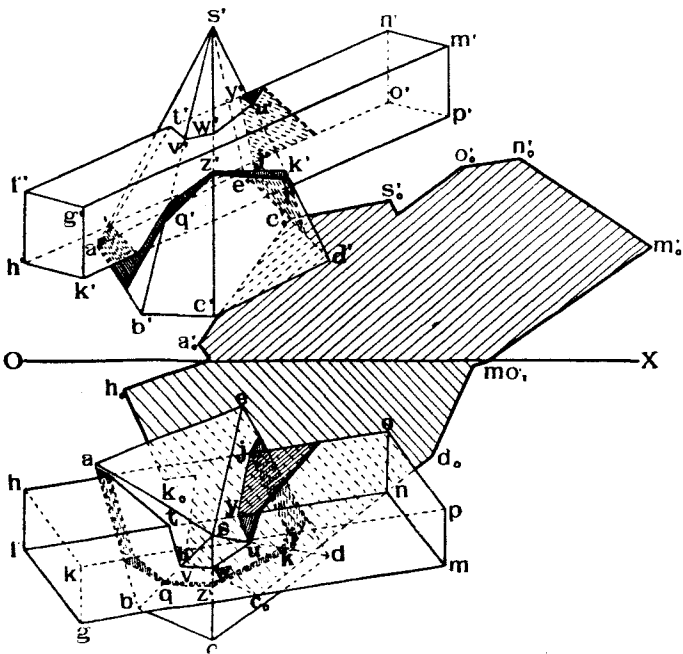
Черт. 221.

тѣнь, падающая на пирамиду отъ контура $GKHONMG$ собственной тѣни призмы.

Изъ разсмотрѣнія взаимнаго расположенія призмы и пирамиды можно предположить, что на пирамиду будутъ падать тѣни лишь отъ реберъ HO и GM призмы.

Проводимъ черезъ ребро HO лучевую плоскость и находимъ точки 3 и 3_1 пересѣченія этой плоскости съ ребрами AB и BE перампды (вспомогательныя линіи $1, 2$ и $1_1, 2_1$).

Линіи $B3$ и $J3$, будутъ служить тѣнями, падающими отъ ребра HO на грани SAB и SDE пирамиды.



Черт. 222.

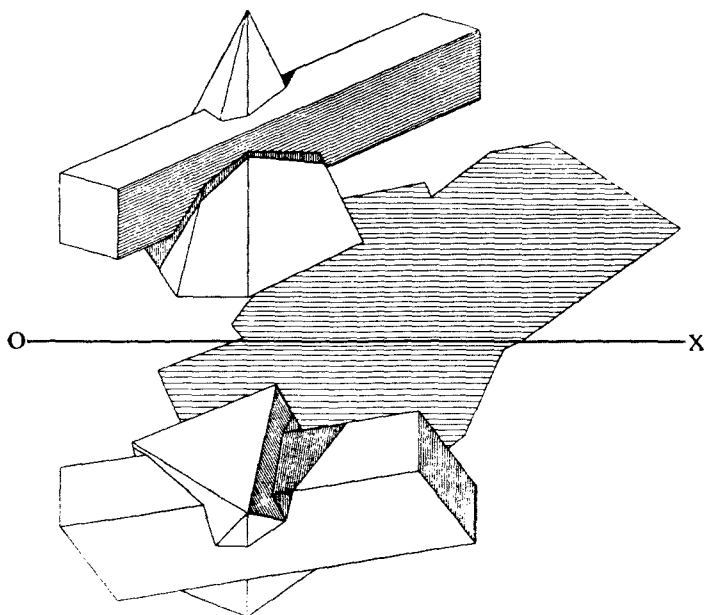
Далѣе проводимъ черезъ ребро GM призмы лучевую плоскость и находимъ линію пересѣченія ея съ гранями пирамиды. Эта линія и будетъ служить тѣнью отъ ребра GM на пирамиду.

Для построенія этой линіи послѣдовательно опредѣляются слѣдующія точки:

Точка **6** пересѣченія ребра AB съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **4, 5**).

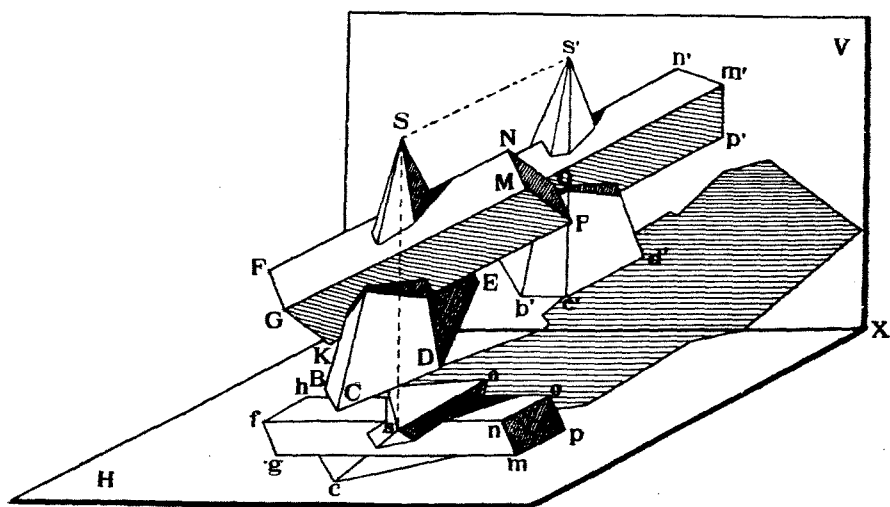
Точка **9** пересѣченія линіи SX_1 , лежащей въ грани SBC , съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **7, 8**).

Точка **12** пересѣченія линіи SX_2 , лежащей въ грани SCD , съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **10, 11**).



Черт. 223.

Точка **15** пересѣченія ребра SD съ лучевой плоскостью (вспомогательная линія **13, 14**) и

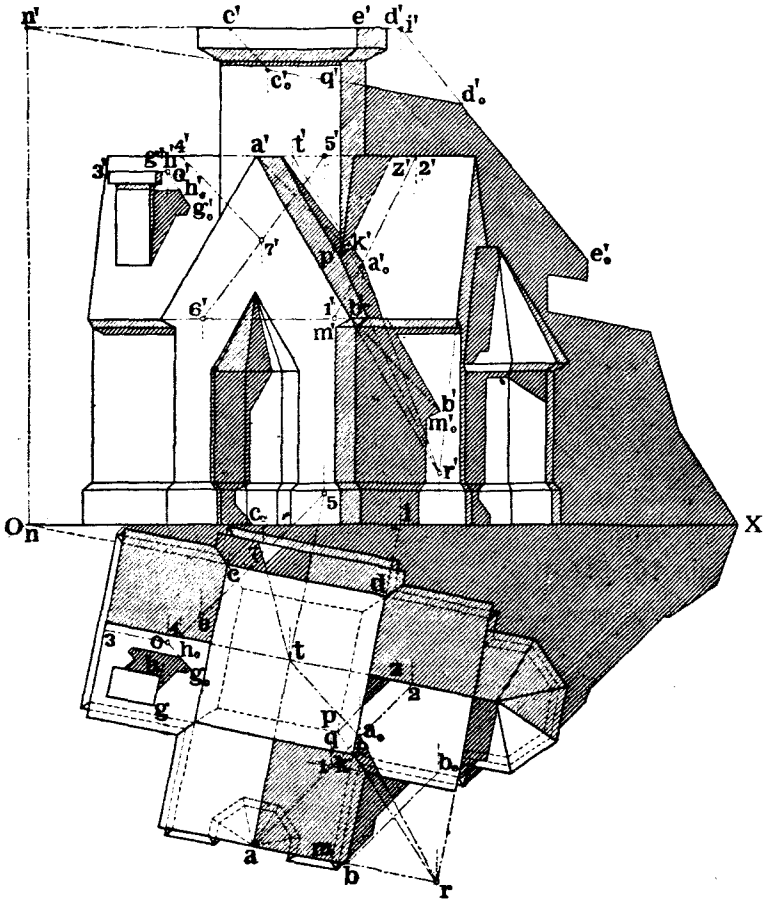


Черт. 224.

Точка **18** пересѣченія ребра *DE* съ лучевой плоскостью (вспомогательная линия **16, 17**).

Полученныя точки соединяются между собой въ слѣдующемъ порядкѣ:

18 съ **15**, **15** съ **12** и эта линия продолжается до пересѣченія съ ребромъ *SC* въ точкѣ **19**, которая соединяется съ точкою **9**. Линія **19, 9**



Черт. 225.

продолжается до пересѣченія съ ребромъ *SB* въ точкѣ **20**, которая соединяется съ точкою **6**.

На чертежѣ 221 проекціи тѣни, падающей отъ пирамиды на призму, заштрихованы.

На черт. 222 показаны видимыя или невидимыя части обоихъ тѣлъ и ихъ всѣхъ тѣней, а на черт. 223 изображены лишь видимыя части тѣлъ и тѣней.

На черт. 224 изображены модели плоскостей проекцій и пересѣкающихся призмы и пирамиды, при чемъ послѣднія построены по разверткамъ ихъ поверхностей. Модели освѣщены лучами свѣта, параллельными принятому направленію. На этомъ чертежѣ показаны также и проекціи пересѣкающихся поверхностей ¹⁾).

Задача № 23. На черт. 225 изображено зданіе въ планѣ и фасадѣ. Построить собственныя и падающія тѣни.

Рѣшеніе.

Построимъ тѣнь отъ вершины A на крышу. Для этого проводимъ черезъ A лучъ и находимъ его пересѣченіе A_0 съ крышей, для чего служитъ вспомогательная линія 12.

Соединяемъ точку A_0 съ точкой T пересѣченія коньковъ крыши. Линія A_0T будетъ служить тѣнью отъ конька AT на скатъ крыши. Соединяя точку A_0 съ точкой R пересѣченія карнизовъ наклонныхъ крышъ, получимъ тѣнь A_0R отъ ребра AR на скатъ крыши.

Тѣнь отъ вертикальнаго ребра PQ башни на скатъ крыши пойдетъ въ планѣ по линіи pz , наклоненной къ OX подъ угломъ въ 45° . Переносимъ точки p и z на V въ точки p' , z' . Линія PZ будетъ искомою тѣнью отъ PQ на крышу.

Проводимъ изъ B и A лучи до пересѣченія ихъ со стѣной дома въ точкахъ K и B_0 . Линія KB_0 будетъ тѣнью отъ AB на стѣну дома. Тѣнь B_0M_0 на ту же стѣну отъ BM будетъ равна и параллельна BM . Построеніе дальнѣйшей тѣни на стѣну дома не представляетъ затрудненій.

Тѣнь отъ башни на V строимъ слѣдующимъ образомъ:

Тѣнь отъ угла ея C будетъ въ C_0 .

Соединяемъ C_0 съ точкой N —слѣдомъ края CD на V . Линія NC_0D_0 будетъ тѣнью отъ CD на V . Соединяя точку D_0 съ I —слѣдомъ DE на V , получимъ линію ID_0E_0 —тѣнь отъ DE на V . Построеніе остальныхъ точекъ тѣни падающей на V и H производится подобнымъ же образомъ, на основаніи общихъ правилъ.

Тѣнь отъ трубы на крышу строится слѣдующимъ образомъ.

Находимъ точку O пересѣченія края GH трубы съ крышею и черезъ O проводимъ линію $OH_0G_0 \parallel TA_0$, такъ какъ тѣни отъ GH и ея параллельной AT на одну и ту же плоскость должны быть параллельны между собой.

Подобнымъ же образомъ находимъ тѣни на крышу и отъ остальныхъ точекъ трубы.

На чертежѣ показано еще построеніе тѣни $T7$ отъ конька $T4$ на скатъ крыши, для чего построена тѣнь отъ точки 4 на этотъ скатъ (вспомогательная линія 56).

Возстановить построеніе остальныхъ точекъ показанныхъ тѣней мы предоставляемъ читателю.

¹⁾ Примѣненіе теоріи тѣней на практикѣ имѣетъ мѣсто при проектированіи оконъ гражданскихъ сооружений, при опредѣленіи высоты домовъ въ зависимости отъ ширины улицъ, при проектированіи свѣтовыхъ двориковъ и т. п.

Подробности см. Н. Рьянъ: „Дневной свѣтъ и расчеты освѣщенности помѣщеній“. СПб. 1908. Изданіе Инст. Инж. П. С. и Его-же, „Ослабленіе силы дневного свѣта, проходящаго черезъ стекла разныхъ сортовъ“, *Извѣстія Собр. Инж. Пут. Сообщ.* 1908 г. № 1. Затѣмъ „Журналъ технич. совѣщанія упр-нія жел. дорогъ по Техн. Отдѣлу отъ 21 апр. 1908 г. № 63.

Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей.

§ 16. Плоскія кривыя линіи.

Всѣ кривыя линіи могутъ быть раздѣлены на два класса: 1) линіи, всѣ элементы которыхъ лежатъ въ одной и той же плоскости, или *кривыя плоскія*, напримѣръ, кругъ, эллипсъ и т. п. и 2) линіи, элементы которыхъ въ одной плоскости не лежатъ, или *кривыя двоякой кривизны*, напримѣръ, винтовыя линіи.

Разсмотримъ построене проекцій кривыхъ линіи и начнемъ съ плоскихъ кривыхъ.

а) Проектированіе случайныхъ кривыхъ линій.

Докажемъ слѣдующую теорему, относящуюся къ кривымъ обоихъ классовъ.

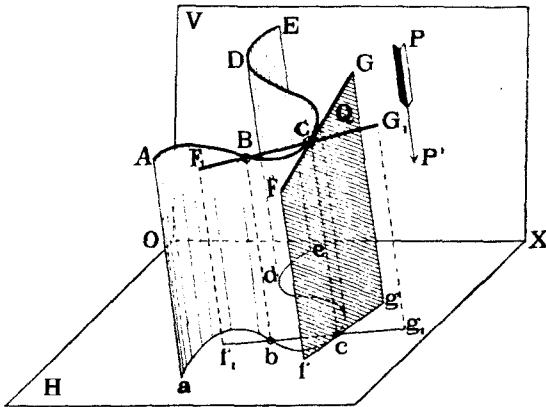
Теорема 16. Если прямая линія касается въ пространствѣ кривой линіи въ нѣкоторой точкѣ, то, при любомъ направленіи проектированія на любую плоскость, проекція прямой касается проекціи кривой въ точкѣ, которая является проевціей вышеупомянутой точки касанія линій въ пространствѣ.

Доказательство.

Пусть дана въ пространствѣ случайная кривая линія $ABCDE$ (чертежъ 226), и въ точкѣ C проведена къ ней касательная FG . Эту послѣднюю можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе сѣкущей F_1CG_1 , при приближеніи точки пересѣченія B къ C до бесконечно малаго разстоянія. Спроектируемъ кривую, сѣкущую и касательную на какую нибудь плоскость H при направленіи проектированія PP_1 . Проекціей кривой будетъ кривая линія $abcde$, проекціей сѣкущей F_1CG_1 будетъ линія f_1cg_1 , которая будетъ пересѣкать проекцію кривой въ точкахъ b и c —

проекціяхъ точекъ B и C . При приближеніи точки B къ C проекція b будетъ приближаться къ проекціи c и въ предѣлѣ сольется съ c , а съ-кущая f_1cg_1 превратится въ касательную fg къ проекціи кривой, что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что совокупность линий, проектирующихъ кривую $ABCDE$, образуетъ цилиндрическую поверхность, а совокупность линий, проектирующихъ касательную FG , образуетъ плоскость, касательную къ упомянутой цилиндрической поверхности по линіи, проектирующей точку касанія.



Черт. 226.

Проекціи плоскихъ кривыхъ линий строятся также, какъ и плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ прямыми линіями (стр. 87). Общій приемъ построения проекцій кривой линіи даннаго вида заключается въ слѣдующемъ: Плоскость P , въ которой должна лежать кривая линія, совмѣщается съ H или съ V , затѣмъ на H или V строится истинная фигура кривой и, наконецъ, плоскость P съ кривою возвращается въ прежнее положеніе.

Прослѣдимъ примѣненіе этого метода на примѣрѣ.

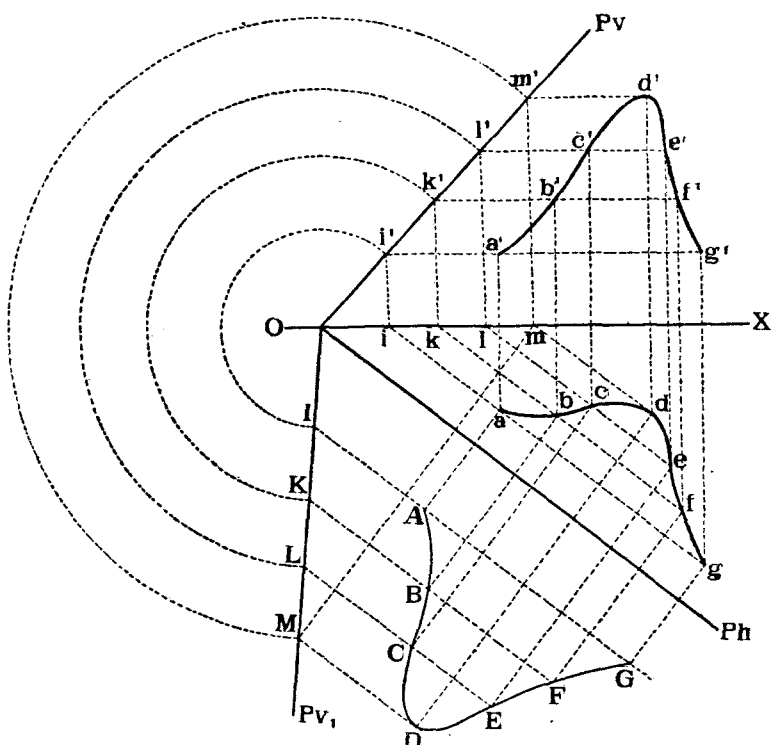
Предположимъ, что требуется построить въ нѣкоторой плоскости P какую нибудь кривую линію $ABCDEFGG$, истинный видъ которой извѣстенъ (черт. 227).

Для рѣшенія этой задачи совмѣщаемъ P съ H и строимъ на H истинную фигуру $ABCDEFGG$ данной кривой линіи. Проводимъ черезъ точки ея рядъ линій GAI , FBK и т. д. параллельныхъ Ph . Возвращаемъ плоскость P со всѣми проведенными въ ней линіями въ прежнее положеніе. Проекціи любой точки A кривой линіи найдутся слѣдующимъ образомъ:

Проводимъ изъ A линію $Aa \perp Ph$ до пересѣченія съ $ia \parallel Ph$. Далѣе проводимъ $aa' \perp OX$ до пересѣченія съ $i'a' \parallel OX$.

Точки a, a' и будут проекциями точки A кривой.

Подобным же образом строим проекции остальных точек кривой



Черт. 227.

и соединяем их плавными кривыми $abcdefg$ и $a'b'c'd'e'f'g'$, которые и будут проекциями искомой кривой линии¹⁾.

б) Приближенные построения.

При различного рода геометрических построениях приходится решать ряд задач, которые допускают лишь известную точность построений, точность, зависящую от разных условий: от совершенства чертежных инструментов, от количества выбранных точек, от умения обчерчивать их по лекалу, и, наконец, от невозможности иногда иметь математически точное решение данной задачи, как например, спрямление дуги круга.

Ниже мы проводим несколько примеров приближенных построений, позволяющих решать подобные задачи с известной точностью.

Решим такую задачу: Дана кривая линия $ABC \dots OP$ случайного вида (черт. 228). Определить ее длину.

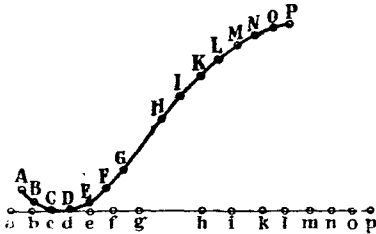
Разделим кривую точками $B, C, D \dots$ на части, которые с достаточной для практики точностью могли бы быть приняты за прямые линии. Таким образом мы заменяем кривую линию вписанной в нее ломанной линией. Проведем через

¹⁾ О применении различного рода плоских кривых в технике, см. F. Ebner. „Leitfaden der Technisch—Wichtigen Kurven“. Leipzig 1906.

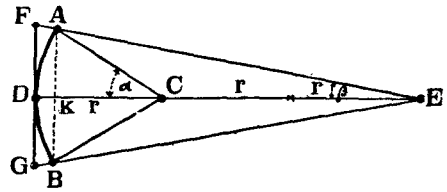
одинъ пазъ такихъ прямолинейныхъ элементовъ CD прямою линію и отложимъ вдоль этой прямой влѣво и вправо отъ CD отрѣзки $bc = BC$, $ab = AB$, $de = DE$ и т. д., равныя соответственнымъ частямъ ломанной линіи.

Сумма всѣхъ этихъ отрѣзковъ, равная ap , и дастъ приближительную длину кривой AP .

Если приходится выпрямить часть дуги круга, то задачу можно рѣшить болѣе точно. Пусть, напримѣръ, (черт. 229) требуется спрямить дугу ADB окружности круга. Проведемъ хорду AB и опустимъ изъ центра C круга перпендикуляръ къ



Черт. 228.



Черт. 229.

AB . Отложимъ отъ точки D , пересѣченія этого перпендикуляра съ дугою AB , вдоль него вправо отрѣзокъ DE , равный тремъ радиусамъ круга, и соединимъ точку E съ точками A и B .

Далѣе проведемъ черезъ точку D касательную къ дугѣ AB до пересѣченія съ продолженіями линій AE и BE въ точкахъ F и G . Отрѣзокъ FG и можно принять съ достаточной для практики точностью равнымъ длинѣ дуги ADB . Дѣйствительно, изъ чертежа имѣемъ:

$$FD = 3r \operatorname{tg} \beta; \operatorname{tg} \beta = \frac{AK}{2r + r \cos \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{2r + r \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}; FD = \frac{3r \sin \alpha}{2 + \cos \alpha},$$

$$AD = \frac{2\pi r \alpha}{360}.$$

Въ нижеслѣдующей таблицѣ даны значенія FD и AD въ частяхъ радиуса r для нѣкоторыхъ угловъ α .

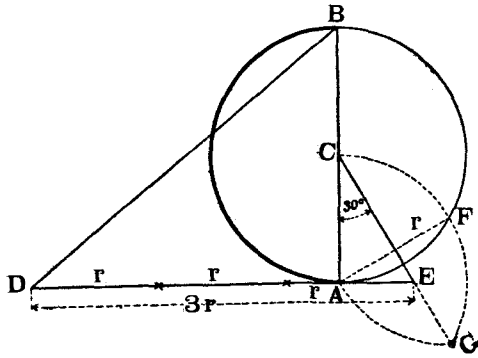
α	FD	AD	$AD - FD$
10°	0,1745	0,1745	0
20	0,3490	0,3491	0,0001
30	0,5234	0,5236	0,0002
40	0,6972	0,6981	0,0009
50	0,8696	0,8727	0,0031
60	1,0392	1,0472	0,0080
90	1,5000	1,5708	0,0708

Этимъ способомъ можно пользоваться съ достаточной для практики точностью при углахъ α не болѣе 40° . Описанный способъ, принадлежащій кардиналу Николаю Куза, даетъ все меньшую и меньшую точность, по мѣрѣ увеличенія центральнаго угла дуги круга. Для спрямленія дуги полуокружнота (2 α = 180°), лучше примѣнять нижеслѣдующій способъ, предложенный Коханскимъ ¹⁾.

Пусть требуется спрямить дугу AB полуокружности круга (черт. 230). Проведемъ въ точкѣ A касательную къ кругу. Изъ центра C проведемъ прямую CE подъ угломъ 30° къ диаметру AB . Для этого достаточно соединить точку C съ G , причѣмъ G построена слѣдующимъ образомъ:

$$AF = AG = FG = AC = r.$$

Замѣтимъ точку E пересѣченія CE съ проведенной ранѣ касательной и отложимъ $ED = 3r$. Прямая BD и



Черт. 230.

будетъ приблизительно равна длинѣ дуги AB .
Дѣйствительно:

$$BD^2 = AB^2 + (DE - AE)^2 = (2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2 = [4 + (3 - \operatorname{tg} 30^\circ)^2] r^2;$$

$$BD = 3,14169 r.$$

Разность между длинами прямой BD и дуги AB равна

$$(3,14169 - 3,14159) r = 0,0001 r.$$

Способъ Николая Куза можно примѣнять и для рѣшенія обратной задачи. Навернуть на дугу круга даннаго радиуса отръзокъ прямой данной длины.

Для этого (черт. 229) проводимъ въ серединѣ даннаго отръзка FG прямую $DE \perp FG$ и откладываемъ $DE = 3r$. Соединяемъ точки F и G съ E и замѣчаемъ точки A и B пересѣченія линій FE и GE съ дугою круга даннаго радиуса r , касательнаго къ EG въ точкѣ D . Длина дуги ADB и будетъ приблизительно равна отръзку FG .

Замѣтимъ опять, что способъ Николая Куза примѣняется при углахъ α не болѣе 40° . Если $\alpha > 40^\circ$, то слѣдуетъ данную длину FG раздѣлить на равныя части такъ, чтобы $\alpha < 40^\circ$ и найти дугу круга по длинѣ равную части прямой tG .

Разсмотримъ теперь примѣненіе къ рѣшенію задачъ кривыхъ ошибокъ. Подъ названіемъ *кривой ошибокъ* ²⁾ понимають вспомогательную кривую, которая служитъ для опредѣленія такихъ точекъ или линій, непосредственно которыя построить трудно или невозможно.

Напримѣръ, рѣшимъ такую задачу:

Дана кривая $ABC...A$ (черт. 231), и къ ней проведена касательная HI . Опредѣлить, по возможности точнѣе, точку касанія.

Если мы проведемъ серію хордъ, параллельныхъ касательной, то точка касанія будетъ соответствовать хордѣ, равной нулю. Чтобы получить эту точку, проводимъ

¹⁾ T. Vahlen «Konstruktionen und Approximationen» Leipzig. 1911. St. 310.

²⁾ «Exercices de Geometrie Descriptive». Par F. J. Paris 1893.

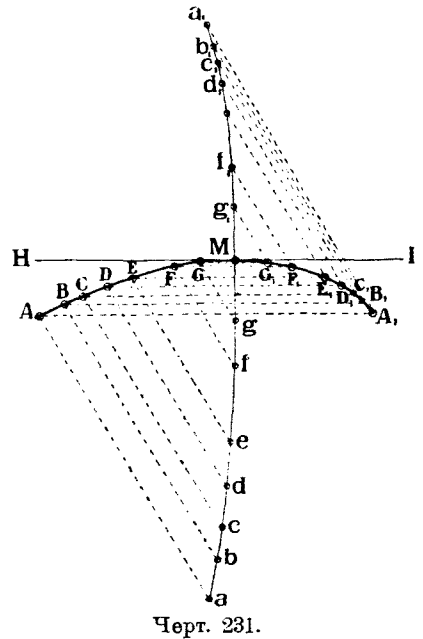
черезъ точки $ABC\dots$ линіи, параллельныя другъ другу, въ произвольномъ направленіи. Отложимъ на этихъ прямыхъ длины пропорціональныя или равныя длинамъ хордъ.

Напримѣръ, пусть $Aa = A_1a_1 = \Delta A_1$;
 $Bb = B_1b_1 = BB_1$ и т. д.

Соединимъ концы полученныхъ отрѣзковъ плавной кривой $abcd\dots b_1a_1$, которая и называется кривой ошибокъ.

Точка M пересѣченія этой кривой съ данной и будетъ искомою точкою касанія.

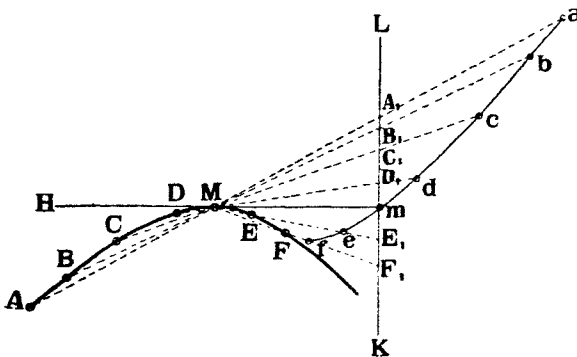
Рѣшимъ слѣдующую задачу: Дана кривая $ABCDEF$ и точка M на ней (черт. 232). Провести въ M прямую, касательную къ кривой. Касательная къ кривой въ данной точкѣ M есть, очевидно, сѣкущая, хорда которой безконечно мала. Проведемъ какую нибудь линію LK , приблизительно перпендикулярную къ предполагаемому направлению касательной. Далѣе проведемъ рядъ сѣкущихъ $AMA_1, BMB_1, CMC_1, DMD_1, MEE_1, MFF_1$ и отложимъ $A_1a = AM$; $B_1b = BM$; $C_1c = CM$ и $E_1e = ME$ и т. д. Соединяя полученные точки $a, b, c\dots e, f$ плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ прямою LK дастъ точку m , определяющую съ точкой M искому касательную. такъ какъ для точки m хорда равна нулю.



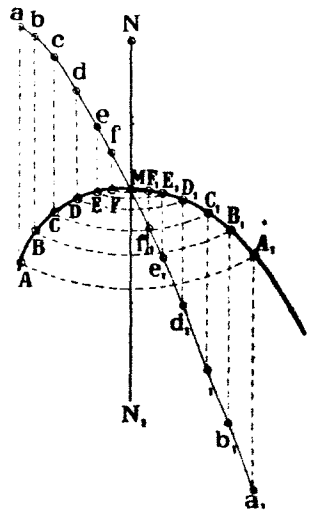
Черт. 231.

На чертежѣ 233 показанъ еще примѣръ примѣненія кривой ошибокъ къ рѣшенію слѣдующей задачѣ:

Дана кривая $ABC\dots B_1A_1$ и точка N внѣ ея. Провести изъ N нормаль къ кривой. Предположимъ, что задача рѣшена и NM есть искомая нормаль. Очевидно, что окружность, описанная изъ центра N ради-



Черт. 232.



Черт. 233.

усомъ NM , будетъ касаться кривой въ точкѣ пересѣченія послѣдней съ нормалью. Такимъ образомъ, хорда сѣченія круга радиуса NM съ кривой AA_1 будетъ безо-

нечно мала. Чтобы построить кривую ошибокъ, проходящую черезъ M , достаточно описать изъ точки N , какъ изъ центра, рядъ круговъ, которые дадутъ хорды AA_1 , BB_1 и т. д. (хорды эти на чертежѣ, во избѣжаніе затемнѣнія его, не показаны).

Затѣмъ построимъ перпендикуляры къ этимъ хордамъ въ концахъ ихъ и отложимъ на этихъ перпендикулярахъ отрѣзки

$$Aa = A_1a_1 = AA_1; \quad Bb = B_1b_1 = BB_1$$

и т. д.

Соединяя полученныя точки плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ кривой AA_1 дастъ точку M , опредѣляющую съ точкой N искомую нормаль NN_1 .

с) Проекція круга.

Очень часто при рѣшеніи различныхъ задачъ въ ортогональныхъ проекціяхъ приходится строить проекціи круга. Послѣдній проектируется въ кругъ на V и H лишь тогда, когда его плоскость параллельна или V или H . Въ остальныхъ случаяхъ онъ будетъ на V и H проектироваться въ видѣ эллипса.

Въ частномъ случаѣ, когда плоскость круга перпендикулярна къ плоскости проекцій, онъ на эту плоскость спроектируется въ прямую линію.

Для вычерчиванія такого эллипса, какъ проекціи круга, приходится строить рядъ его точекъ и затѣмъ соединять ихъ плавной кривой по лекалу.

Покажемъ три способа, при помощи которыхъ можно построить проекцію круга въ видѣ эллипса на любую плоскость при любомъ направленіи проектированія.

1-й способъ. Пусть данъ кругъ $ABDE$ (черт. 234 слѣва). Опишемъ вокругъ него квадратъ $FGHI$ и проведемъ діагонали квадрата FH и GI . Діагонали эти пересѣкутъ кругъ въ точкахъ K , L , M , N . Нетрудно показать, что каждая изъ этихъ точекъ раздѣлитъ полудіагональ на части, отношеніе между которыми мы можемъ съ достаточной для практики точностью принять равнымъ 0,7 (точнѣе (0,70711)).

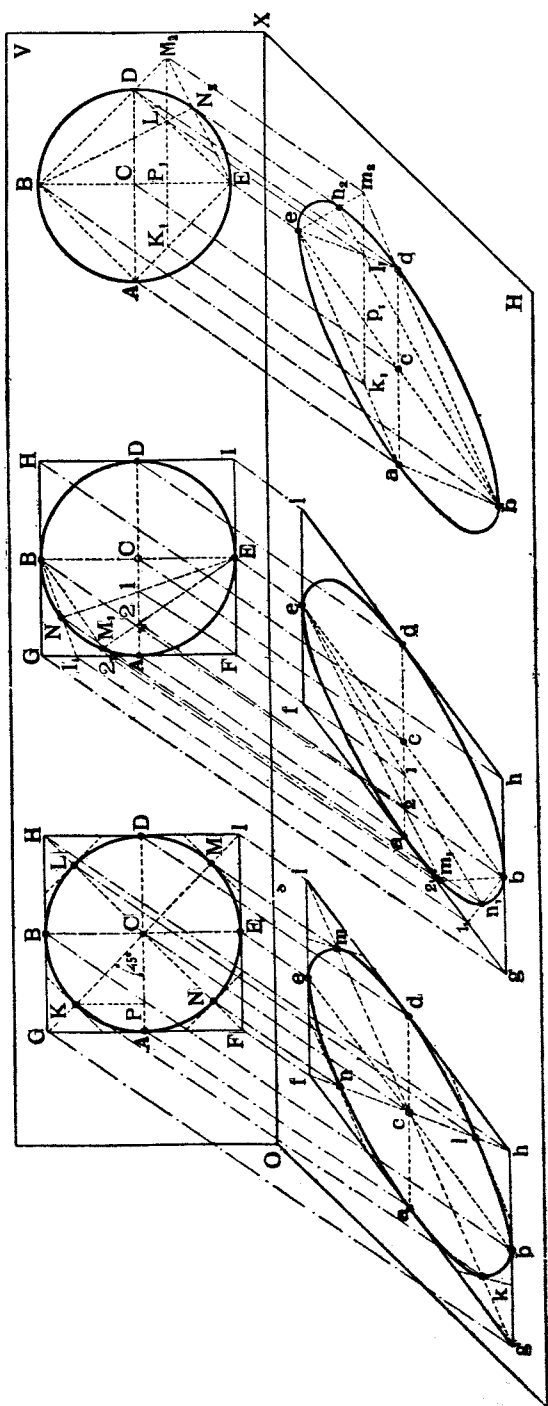
Доказать это можно слѣдующимъ образомъ: опустимъ изъ точки K перпендикуляръ KP на діаметръ параллельный GH . Изъ подобія треугольниковъ AGC и PKC , имѣемъ:

$$\frac{KC}{GC} = \frac{KP}{GA};$$

но $GA = KC =$ радіусу круга; поэтому

$$\frac{KC}{GC} = \frac{KP}{KC} = \sin 45 = 0,70711 \text{ или } \approx 0,7,$$

что и требовалось доказать.



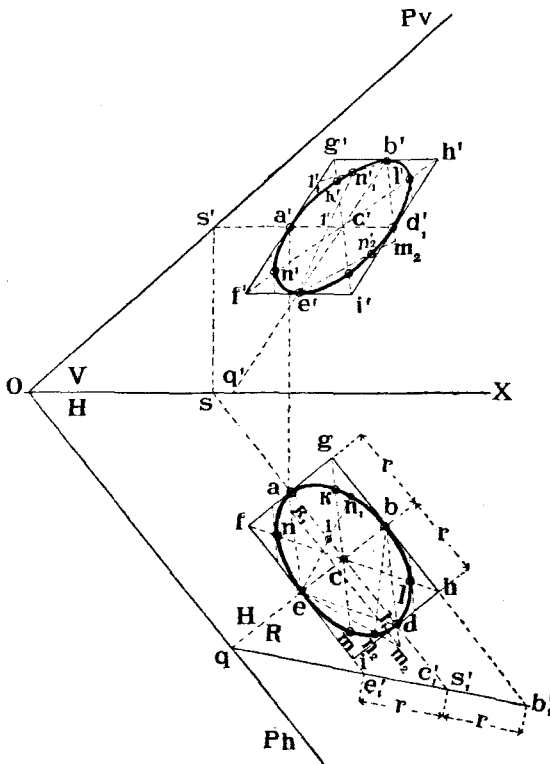
Черт. 234.

При любомъ параллельномъ проектированіи квадрата $FGHI$ со вписаннымъ въ него кругомъ проекціи точекъ K, L, M и N раздѣляютъ проекціи діагоналей въ томъ же отношеніи 0,7.

Проведемъ въ точкахъ K, L, M, N линіи касательныя къ кругу. Эти линіи будутъ параллельны соответственнымъ діагоналямъ квадрата. Проекціи упомянутыхъ касательныхъ будутъ касательны къ эллипсу, проекціи круга, и будутъ параллельны проекціямъ діагоналей квадрата, что слѣдуетъ имѣть въ виду, при вычерчиваніи эллипса.

Примѣняютъ этотъ способъ къ построению ортогональныхъ проекцій круга слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что даны плоскость P (черт. 235) и въ ней точка C .



Черт. 235.

Требуется построить проекціи круга, лежащаго въ P съ центромъ въ точкѣ C .

Радиусъ круга данъ (r).

Поведимъ черезъ точку C горизонталь CS въ плоскости P и откладываемъ $ca = cd = r$.

Точки A и D будутъ концами діаметра AD круга. Проводимъ теперь

діаметръ EB перпендикулярный къ AD . При такихъ условіяхъ eb будетъ перпендикулярна къ ad .

Находимъ горизонтальный слѣдъ Q этого діаметра и строимъ вертикальную его проекцію $q'b'$. Концы его E и B опредѣляются слѣдующимъ образомъ: перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$ и спроектируемъ P на B . Проекціей P на B будетъ прямая линия qs_1' , при чемъ:

$$cs_1' = ss'.$$

Діаметръ EB круга на B спроектируется безъ искаженія. Поэтому откладываемъ

$$c_1'e_1' = c_1'b_1' = r.$$

Переносимъ точки e_1' и b_1' въ систему $\frac{V}{H}$. Проекціями діаметра EB будутъ $e'b'$ и eb .

Проводимъ теперь черезъ точки E и B стороны квадрата параллельныя діаметру AD , а черезъ точки A и D стороны квадрата, параллельныя діаметру EB .

Проекціями квадрата, описаннаго вокругъ искомага круга, будутъ $fghi$ и $f'g'h'i'$. Отмѣчаемъ теперь на проекціяхъ діагоналей квадрата точки k', l', m', n' и k, l, m, n , которыя дѣлили бы проекціи полудиагоналей въ отношеніи 0,7, напримѣръ, откладываемъ $c'k' = 0,7c'g'$; $cl = 0,7ch$ и т. д.

Имѣя теперь проекціи восьми точекъ круга, можно по лекалу соединить ихъ плавности кривыми, которыя будутъ эллипсами. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что обѣ проекціи круга должны быть касательными къ проекціямъ квадрата, описаннаго вокругъ круга, и къ проекціямъ линий, проведенныхъ черезъ точки K, L, M, N параллельно діагоналямъ квадрата.

Изъ числа такихъ линий на чертежѣ 235 показано двѣ, одна — проходящая черезъ точку N и другая черезъ точку L .

2-й способъ (черт. 234 средній кругъ).

Раздѣлимъ половину GA стороны квадрата на нѣсколько (на чертежѣ три) равныхъ частей:

$$G1_1 = 1_12_1 = 2_1A$$

и перенумеруемъ концы отрѣзковъ цифрами 1, 2, и т. д., начиная отъ вершины G . На такое же число такихъ же частей дѣлимъ полудіаметръ AC , проходящій черезъ точку A стороны AG . Концы частей ($C1=12=2A$) обозначаемъ въ направленіи отъ точки C цифрами 1, 2, и т. д.

Далѣе соединяемъ точку B съ точками 1, 2, и т. д., а точку E съ точками 1, 2 и т. д. и замѣчаемъ точки пересѣченія линий, проходящія черезъ упомянутыя точки дѣленія, но при томъ такихъ линий, въ обозна-

ченіи которыхъ имѣются цифры одного и того же наименованія. Напримѣръ, отмѣчаемъ точки:

$$\begin{array}{l} N_1 \text{— пересѣченія } B1_1 \text{ съ } E1 \\ M_1 \quad \quad \quad \text{»} \quad B2_1 \text{ съ } E2_1 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Нетрудно видѣть, что точки N_1, M_1 и др. будутъ принадлежать окружности круга, такъ какъ углы BN_1E, BM_1E будутъ прямыми.

На какую бы плоскость и при какомъ бы направленіи параллельнаго проектированія мы не спроектировали бы квадратъ $FGHI$, діаметры AD и BE и точки $1_1, 2_1, 1$ и 2 , проекціи линій $E1, E2$ и $B1_1, B2_1$ пересѣкнутся въ точкахъ n_1 и m_1 , которыя будутъ принадлежать эллипсу—проекціи круга $ABDE$.

На чертежѣ 235 такимъ способомъ построена точка N_1 , причемъ:

$$g'1' = \frac{a'g'}{3}$$

и

$$c'1' = \frac{a'c'}{3}.$$

3-й способъ (черт. 234 справа).

Впишемъ въ кругъ квадратъ $ADDE$. Проведемъ случайную линію $K_1L_1 \parallel AD$ и замѣтимъ точки L_1 и M_2 пересѣченія ея со сторонами ED и BD .

Соединимъ точки E съ M_2 и B съ L_1 . Точка N_2 пересѣченія линій EM_2 и BL_1 будетъ принадлежать окружности круга, такъ какъ уголь BNE является прямымъ и опирается на діаметръ BE . Доказательство этого слѣдуетъ изъ теоремы, что три перпендикуляра (ED, M_2P_1 и BN_2), опущенные изъ вершинъ треугольника (BEM_2) на противоположнныя стороны, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Проектируя квадратъ $ABDE$ на любую плоскость, можно въ этой плоскости сдѣлать построенія, аналогичныя вышеуказаннымъ и найти точку n_2 , принадлежащую эллипсу—проекціи круга.

Пусть $abde$ — параллелограммъ, являющійся проекціей квадрата $ABBE$; проводимъ $k_1l_1 \parallel ad$ и находимъ точки l_1 и m_2 пересѣченія kl_1 съ be и bd .

Соединяемъ e съ m_2 и b съ l_1 . Точка n_2 пересѣченія линіи bl_1 съ em_2 и будетъ искомой.

На чертежѣ 235 подобнымъ способомъ построена точка n_2' , n_2 .

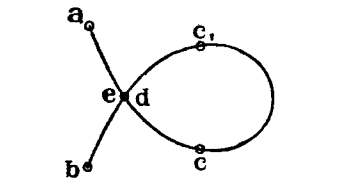
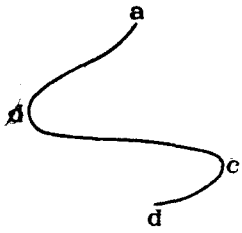
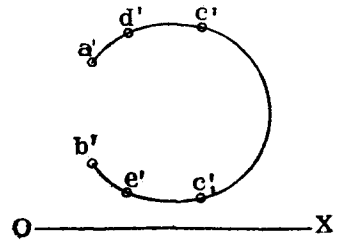
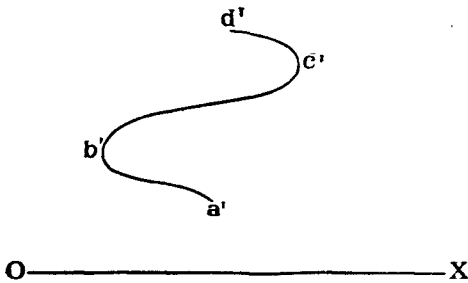
Проводимъ $k_1l_1 \parallel ad$. Находимъ точки l_1 и m_2 пересѣченія k_1l_1 съ ed и bd . Соединяемъ e съ m_2 , а b съ l_1 и замѣчаемъ точку n_2 пересѣченія

линій em_2 съ bl_1 . Точка n_2 и будет горизонтальной проекціей точки N_2 принадлежащей кругу. Вертикальная проекція n_2' найдется на линіи $e'm_2'$ ¹⁾.

§ 17. Кривыя линіи двоякой кривизны.

а) Проектированіе случайныхъ кривыхъ линій.

Кривая линія двоякой кривизны задается двумя ея проекціями и обозначеніями одной или нѣсколькихъ ея точекъ (черт. 236). Обозначеніе



Черт. 236.

Черт. 237.

точекъ въ проекціяхъ необходимо бываетъ тогда, когда можетъ возникнуть сомнѣніе, какая часть одной проекціи кривой соотвѣтствуетъ какой части другой проекціи. Напримѣръ, если не обозначать точекъ проекціи кривой, изображенной на чертежѣ 237, то является подобнаго рода неопредѣленность заданія: точка a горизонтальной проекціи можетъ соотвѣтствовать точкѣ b' вертикальной проекціи.

Обозначенія же, приведенныя на чертежѣ 237 устраняютъ эту неопредѣленность.

Если требуется опредѣлить истинную длину кривой линіи двоякой кривизны, то можно поступить слѣдующимъ образомъ (черт. 238).

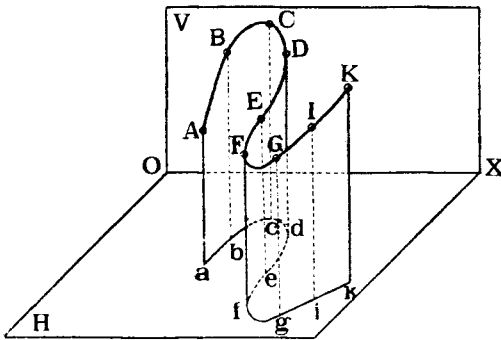
Проводимъ черезъ точки данной кривой AK рядъ линій, параллель-

¹⁾ Другіе способы построения проекцій круга см. O. Richter „Kreis und Kugel in senkrechter projektion“ Leipzig. 1908.

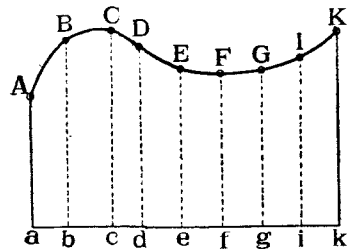
ных другъ другу и, напримѣръ, перпендикулярныхъ къ H . Совокупность этихъ линий образуетъ нѣкоторую цилиндрическую поверхность, которая пересѣчетъ H по линіи $ab . . . ik$.

Разогнемъ или, какъ говорятъ, развернемъ эту поверхность въ плоскость, и пусть выпрямленный видъ ея, или ея развертка, изображенъ на черт. 239, и на развертку перенесены также точки данной кривой.

Тогда длина плоской кривой линіи $ABC . . . K$, изображенной на разверткѣ, и будетъ равна истинной длинѣ данной кривой линіи двойкой кривизны.



Черт. 238.



Черт. 239.

Измѣрить же длину плоской кривой линіи съ точностью, достаточной для практики, можно, напримѣръ, разбить ее на участки AB, BC, CD и т. д., мало отличающіеся отъ прямыхъ линій, и выпрямивъ затѣмъ ломаную линію $ABCD . . . K$ (см. стр. 152).

На черт. 240 изображено нѣсколько пространственныхъ кривыхъ, и показаны ихъ проекціи на плоскость H .

Кривая $ABCDE$ проектируется въ случайную кривую же линію $abcde$.

Проекціи изображенныхъ на черт. 240 кривыхъ имѣютъ, такъ называемыя, *особенныя точки*. Напримѣръ, кривая FGI , переходя изъ перваго угла пространства во второй, касается V въ точкѣ G и имѣетъ въ этой точкѣ себѣ касательную прямую GG_1 .

Проекція fgi кривой, переходя съ передней половины H на заднюю полу, коснется оси OX въ точкѣ g , служащей проекціей точки G .

Точка g называется *точкой перегиба* кривой fgi .

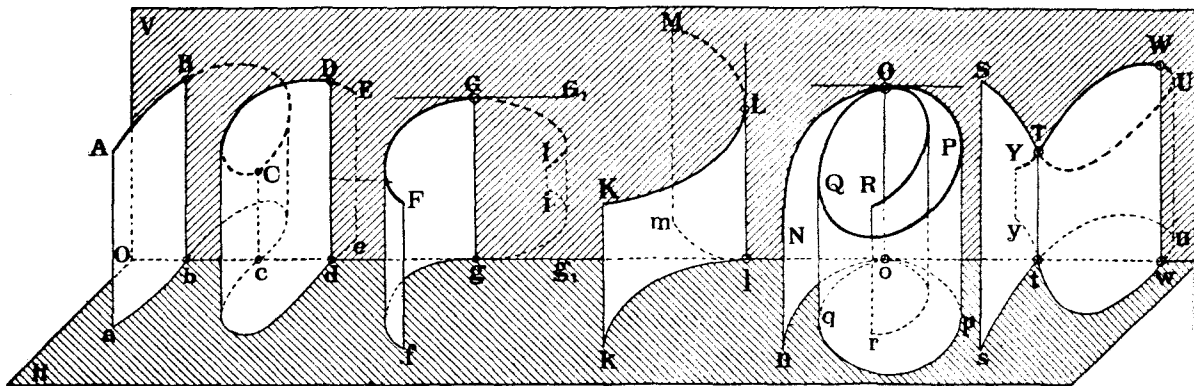
Третья, изображенная на чертежѣ 240, кривая KLM , переходя изъ перваго угла во второй, касается V въ точкѣ L , при чемъ касательная къ кривой въ этой точкѣ перпендикулярна къ H .

Проекція klm кривой касается оси OX въ точкѣ l , которая называется *точкой возврата* кривой klm .

Если кривая $NOPQOR$, дѣлая нѣсколько завитковъ въ пространствѣ, касается сама себя въ одной и той же точкѣ O , то и витки проекціи ея $norqor$ будутъ касаться другъ друга въ точкѣ o , проекціи точки O . Точка o называется *точкой повторенія* кривой $norqor$.

Наконецъ, если кривая $STUWTU$ въ пространствѣ пересѣкаетъ сама себя въ какой-нибудь точкѣ T , то и проекція $stuwty$ этой кривой пересѣкаетъ сама себя въ точкѣ t , проекціи точки T .

Точка t называется *кратной точкой* кривой $stuwty$.



Черт. 240.

Такъ какъ одна параллельная проекція не опредѣляетъ проектируемой формы, то проекціи кривыхъ изображенныхъ на чертежѣ 240 могутъ соответствовать различнымъ кривымъ, начерченнымъ на проектирующихъ ихъ цилиндрахъ.

в) Проекція цилиндрической винтовой линіи.

Среди различныхъ кривыхъ линій двоякой кривизны наибольшее примѣненіе въ технику имѣютъ *цилиндрическія винтовыя линіи*, изображеніе и нѣкоторыя свойства которыхъ мы здѣсь въ видѣ примѣра и рассмотримъ.

Цилиндрической винтовой линіей называется такая линія, которая образована движеніемъ точки, вращающейся вокругъ прямой линіи II (черт. 241) и совершающей кромѣ того поступательныя движенія параллельно оси II , при чемъ поступательныя движенія параллельно оси пропорціональны угловымъ перемѣщеніямъ вокругъ оси. Линія II называется *осью винтовой линіи*.

Расстояніе точки до оси II называется *радіусомъ винтовой линіи*.

Линія, образованная движеніемъ точки по такому закону, очевидно, можетъ быть начерчена на поверхности прямого круговаго цилиндра

того же радіуса, что и винтовая линія, и съ той же осью II . Точка, образующая своимъ движеніемъ винтовую линію, сдѣлавъ полный оборотъ вокругъ оси цилиндра, придетъ опять на ту же производящую цилиндра, съ которой она начала свой путь.

Длина винтовой линіи между смежными точками ея, лежащими на одной и той же производящей цилиндра, называется *длиной одного оборота винтовой линіей*. Напримѣръ, на черт. 241 изображенъ одинъ оборотъ винтовой линіи и длина его будетъ $1, 2, 3 \dots 17$.

Разстояніе между точками 1 и 17 , лежащими на одной и той же производящей цилиндра, называется *шагомъ винтовой линіи*.

Разсмотримъ, какъ построить проекціи винтовой линіи по даннымъ: радіусу ея r , шагу h и оси II .

Пусть (черт. 242) ось II винтовой линіи перпендикулярна къ H и задана ея проекціями $ii, i'i'$.

Такъ какъ всѣ точки винтовой отстоятъ отъ оси II на одно и то же разстояніе r , то всѣ точки проекціи винтовой на H будутъ отстоятъ на одномъ и томъ же разстояніи отъ ii , т. е. винтовая линія спроектируется на H въ кругъ радіуса r съ центромъ въ ii .

Пусть начальное положеніе точки, образующей своимъ движеніемъ винтовую линію, будетъ 1 ($1'$), совпадающее съ H .

Раздѣлимъ кругъ на нѣкоторое число, напримѣръ, на 16 равныхъ частей и примемъ точки $2, 3, 4 \dots$ дѣленія за проекціи точекъ винтовой.

Если шагъ винтовой равенъ длинѣ h , то при переходѣ точки изъ положенія 1 во 2 , она поднимется надъ H на высоту $\frac{h}{16}$, при переходѣ изъ 1 въ 3 — на высоту $\frac{2h}{16}$ и т. д.

Поэтому возвышеніе вертикальной проекціи $2'$ точки 2 надъ OX будетъ равно $\frac{h}{16}$, возвышеніе точки $3'$ надъ осью будетъ равно $\frac{2h}{16}$ и т. д.

Построивъ такимъ образомъ вертикальныя проекціи $1', 2', 3' \dots$ и т. д. точекъ винтовой, соединимъ ихъ плавной кривой, которая и будетъ служить вертикальной проекціей винтовой линіи.

Нетрудно показать, что эта проекція будетъ *синусоидой*.

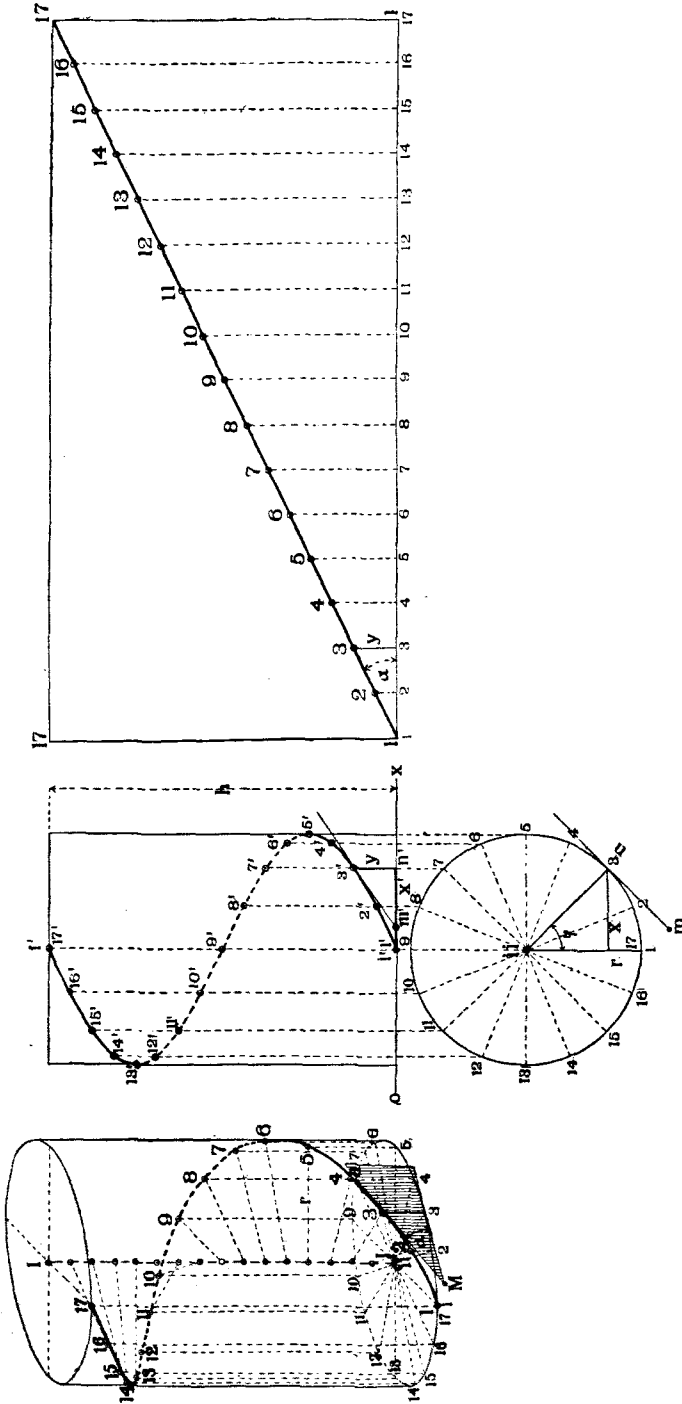
Примемъ за оси координатъ линіи OX и $i'i'$ и обозначимъ координаты какой-нибудь точки $3'$ черезъ x и y , а уголъ поворота точки 3 отъ начальнаго положенія 1 черезъ φ .

Тогда изъ чертежа имѣемъ:

$$x = r \sin \varphi; \quad \frac{h}{y} = \frac{2\pi}{\varphi},$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} \cdot y,$$



Черт. 243.

Черт. 242.

Черт. 241.

и, наконецъ,

$$x = r \cdot \sin \frac{2\pi}{h} \cdot y \text{ — уравненіе синусоиды.}$$

Точка, образующая своимъ движеніемъ винтовую линію, можетъ вращаться вокругъ оси *II* по направленію движенія часовой стрѣлки или противъ, если смотрѣть по оси *II* въ направленіи удаленія точки. Перваго рода движеніе даетъ винтовую называемую *извивающеюся вправо*, движеніе противоположное даетъ винтовую *извивающуюся влево*. Въ техникѣ примѣняютъ главнымъ образомъ винтовыя линіи извивающіяся вправо; такая линія и изображена на черт. 241 и 242.

Разрѣжемъ цилиндръ, на которомъ начерчена винтовая линія, по линіи **1,17** и развернемъ его поверхность въ плоскость (черт. 243). На разверткѣ эта поверхность изобразится въ видѣ прямоугольника, высота котораго равна шагу *h* винтовой, а основаніе равно длинѣ дуги круга-горизонтальной проекціи винтовой.

На основаніи закона образованія винтовой мы имѣемъ изъ черт. 242

$$\frac{y}{\varphi} = \frac{h}{2\pi},$$

или

$$\frac{y}{\text{дугѣ } 1,3} = \frac{h}{2\pi r}.$$

Но дуга 1,3 на чертежѣ 243 изображается въ видѣ отрезка 1,3 основанія прямоугольника развертки.

Если на этой разверткѣ изобразить и развертку винтовой линіи, то для любой точки этой развертки должно имѣть мѣсто равенство подобное только что написанному. А это показываетъ, что на разверткѣ винтовая линія изобразится въ видѣ прямой линіи (діагонали) **1,17** прямоугольника.

Длина этой діагонали будетъ равна истинной длинѣ одного оборота винтовой линіи, а уголъ наклона діагонали къ высотѣ прямоугольника, равенъ углу наклона винтовой къ производящимъ цилиндра

Изъ геометріи извѣстно, что уголъ между винтовой линіей и производящей цилиндра равенъ углу между касательной къ винтовой въ той же точкѣ и той же производящей.

Поэтому всѣ касательныя въ любыхъ точкахъ винтовой линіи будутъ одинаково наклонены къ производящимъ цилиндра, а, слѣдовательно, будутъ наклонены и къ *H* подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α , равнымъ углу наклона діагонали прямоугольника (черт. 243) къ его основанію.

Разсмотримъ проекціи касательной къ винтовой въ какой-нибудь точкѣ **3** (черт. 242). Пусть точка *M* будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ этой касательной.

Въ пространствѣ линія $MЗ$ является гипотенузой прямоугольнаго треугольника $MЗN$, однимъ катетомъ котораго служить отрѣзокъ $З'n'$, а другимъ — mn , который будетъ горизонтальной проекціей касательной и называется *подкасательной* $MЗ$.

Длина этой подкасательной равна:

$$mn = y \cotg \alpha.$$

Изъ чертежа же 243 имѣемъ

$$1,3 = y \cotg \alpha,$$

и сравнивая съ только что полученнымъ выраженіемъ, получаемъ:

$$1,3 = mn;$$

отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 17. Длина подкасательной къ винтовой равна выпрямленной дугѣ круга горизонтальной проекціи винтовой отъ начальной точки до проекціи точки касанія.

Пользуясь этой теоремой, можно легко строить проекціи касательной въ любой точкѣ винтовой линіи.

Напримѣръ, чтобы построить касательную въ точкѣ $З$ (черт. 242), проводимъ въ точкѣ $З$ прямую, касательную къ кругу, и откладываемъ на ней отрѣзокъ $mЗ$ равный выпрямленной дугѣ $1,3$. Находимъ точку m' на оси OX и соединяемъ m' съ точкой $З'$. Прямая $m'З'$ будетъ вертикальной проекціей касательной.

На черт. 242 изображены проекціи винтовой линіи, когда ось ея перпендикулярна къ H .

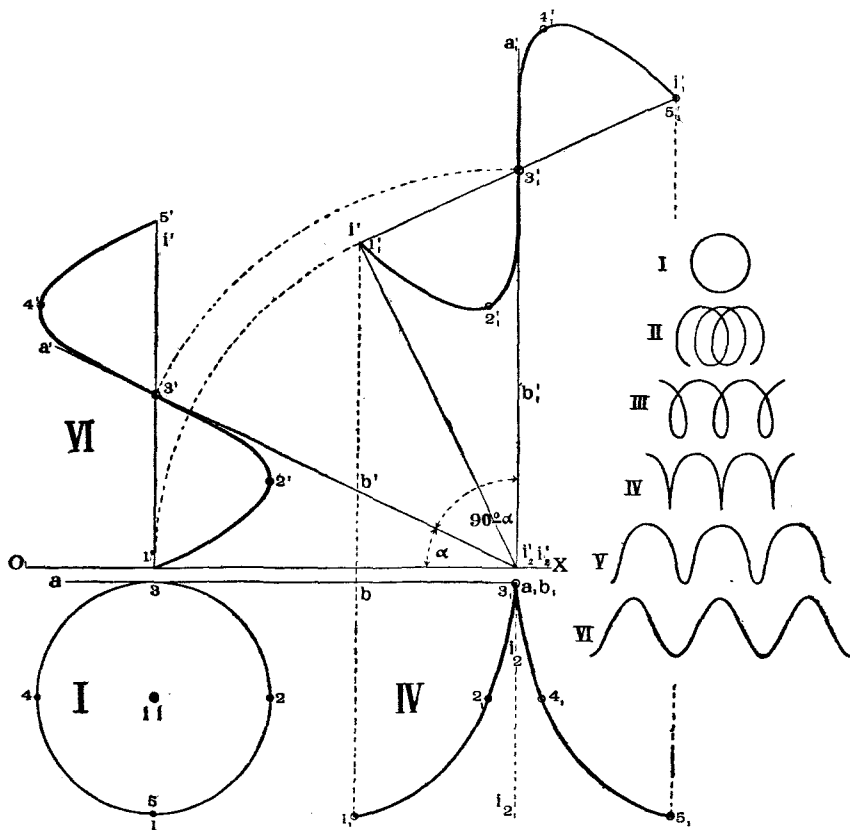
Если же эта ось будетъ занимать иныя положенія, то и проекціи винтовой будутъ имѣть иную форму.

На черт. 244 изображенъ одинъ изъ видовъ проекцій винтовой въ случаѣ, когда винтовая повернута вокругъ оси $I_2 I_2 \perp V$ на уголъ $90^\circ - \alpha$, гдѣ α —уголъ наклона винтовой къ H , или, что то же — уголъ наклона къ H касательной къ винтовой въ точкѣ $З$.

Послѣ поворота винтовая на V спроектируется въ видѣ синусоиды той же формы, какъ и до поворота, а на H —въ видѣ кривой съ точкой возврата $З_1$.

Если мы повернемъ винтовую вокругъ той же оси $I_2 I_2$, но на уголъ меньшій $90^\circ - \alpha$, то проекція винтовой изобразится въ видѣ петлеобразныхъ кривыхъ подобныхъ кривымъ II или III по черт. 245. При углѣ поворота большемъ $90^\circ - \alpha$, горизонтальныя проекціи винтовой будутъ подобны кривой V (черт. 245).

Наконецъ, если уголъ поворота будетъ равенъ 90° , то винтовая на V и на H спроектируется въ видѣ синусоиды типа VI (черт. 245).



Черт. 244.

Черт. 245.

§ 18. Виды наиболѣе примѣняемыхъ въ технику кривыхъ поверхностей и способы заданія ихъ въ проекціяхъ.

а) Общія понятія.

Въ Начертательной Геометріи каждая кривая поверхность разсматривается, какъ совокупность послѣдовательныхъ положеній линіи, движущейся въ пространствѣ по опредѣленному закону ¹⁾.

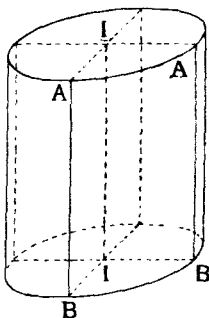
¹⁾ Въ этомъ отношеніи Начертательная Геометрія отличается отъ Аналитической Геометріи, въ которой кривая поверхность опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ должны удовлетворять нѣкоторому уравненію. Однако, изображать поверхность точками затруднительно, почему въ Начертательной Геометріи и принято изображать поверхность при помощи ея производящихъ.

Линія, образующая своимъ движеніемъ поверхность, называется *образующей или производящей* этой поверхности.

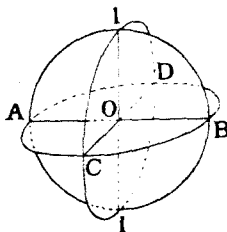
Всѣ кривыя поверхности можно раздѣлить на два класса, положивъ въ основу классификаціи видъ ихъ производящихъ:

1. *Поверхности съ прямыми производящими*, т. е. образованныя движеніемъ прямой линіи, какъ напримѣръ, цилиндрическая поверхность (черт. 246), образованная вращеніемъ прямой линіи AB вокругъ параллельной ей оси II .

2. *Поверхности съ кривыми производящими*, т. е. образованныя движеніемъ кривой линіи, какъ напримѣръ, шаровая поверхность, образованная вращеніемъ круга $CIDI$ (черт. 247) вокругъ своего діаметра II .



Черт. 246.



Черт. 247.

Одна и та же поверхность можетъ быть образована движеніемъ различныхъ линій по разнымъ законамъ. Напримѣръ, цилиндръ, изображенный на черт. 246 можетъ быть образованъ движеніемъ круга BB , центръ котораго скользитъ вдоль оси II и плоскость котораго остается все время перпендикулярной къ II . Шаръ, изображенный на черт. 247, можетъ быть образованъ движеніемъ круга $ACBD$, центръ котораго скользитъ вдоль оси II , плоскость котораго остается перпендикулярной къ II , а радіусъ измѣняется по нѣкоторому закону и т. д.

Поверхности съ прямыми производящими называютъ также *линейчатыми*, т. е. образованными линіями, которыя можно проводить по прямой линейкѣ.

Если смежныя прямолинейныя производящія кривой поверхности параллельны другъ другу или пересѣкаются другъ съ другомъ, то такую кривую поверхность можно развернуть въ плоскость, вращая плоскіе элементы этой поверхности вокругъ послѣдовательныхъ производящихъ до совмѣщенія съ плоскостью одного изъ нихъ.

Поверхности, обладающія такимъ свойствомъ, называются *разверзаемыми*.

Таблица кривыхъ поверхностей.

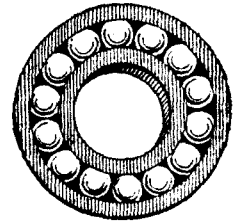
П о в е р х н о с т и л и н е й ч а т ы я .						Поверхности съ кривыми производящими.			
Р а з в о р з а о м ы я .			Н о р а з в о р з а о м ы я .			Постояннаго вида.		Переменнаго вида.	
Цилиндрическія или цилиндры.	Коническія или конуса.	Поверхности съ ребромъ возврата.	Гиперболическія параболоиды или косыя плоскости.	Цилиндроида.	Коноида.	Косые цилиндры о трехъ направляющихъ.	Поверхности вращенія.	Кривые цилиндры.	—
1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Разверзаемые голисоиды.	1) Прямая косая плоскость.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Случайнаго вида.	1) Кривые цилиндры съ плоской направляющей.	1) Эллипсоиды.
2) Круговые.	2) Круговые.	2) Разверзаемые кольцевые голисоиды.	2) Наклонныя косыя плоскости.	2) Винтовые.	2) Винтовые коноиды или неразверзаемые голисоиды.	2) Косые голисоиды.	2) Шары.	2) Голисоидальные цилиндры плоскаго горизонтальнаго сѣченія.	2) Однополые эллиптическія гиперболоиды.
3) Эллиптическія.	3) Эллиптическія.	3) Поверхности одинаковаго ската.	—	—	3) Кольцевые винтовые коноиды.	3) Косые кольцевые голисоиды.	3) Кольца.	3) Голисоидальные цилиндры плоскаго меридіональнаго сѣченія.	3) Графическія поверхности.
4) Параболическія.	—	—	—	—	4) Прямые коноиды.	—	4) Торы.	4) Голисоидальные цилиндры круглаго нормальнаго сѣченія.	—
5) Овоидальные.	—	—	—	—	—	—	5) Двухосные эллипсоиды.	—	—
—	—	—	—	—	—	—	6) Гиперболоиды вращенія.	—	—

Если же поверхность не заключает въ себѣ прямолинейныхъ производящихъ, или, если ея смежныя прямолинейныя производящія не параллельны другъ другу и не пересѣкаются, то такія поверхности нельзя развернуть въ плоскость, и онѣ называются *неразверзаемыми или косыми*.

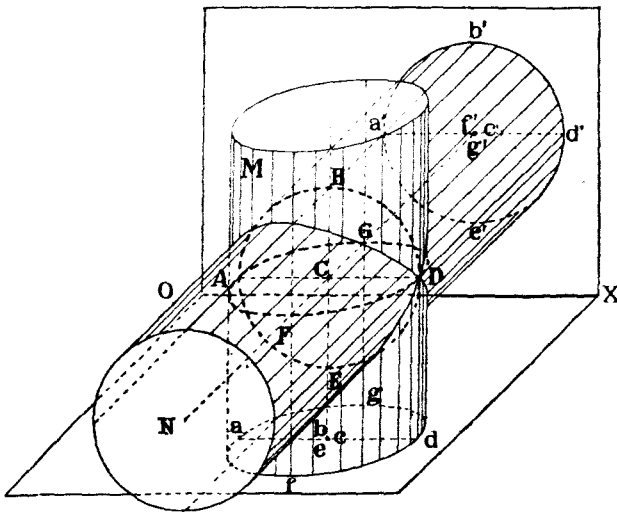
Въ таблицѣ, помѣщенной на стр. 170, перечислены тѣ изъ поверхностей, которыя въ дальнѣйшемъ нами будутъ разсмотрѣны ¹⁾.

Кривую поверхность можно образовать не только движеніемъ линіи, но и движеніемъ какой-нибудь поверхности, которая въ этомъ случаѣ называется *образующей поверхностью*.

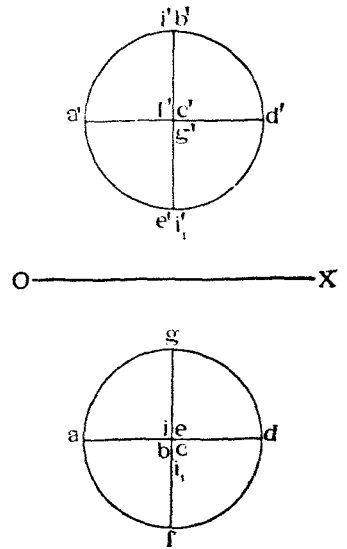
Образуемая такимъ образомъ поверхность будетъ обертывать различныя положенія образующей поверхности и называется по отношенію къ послѣдней *обертывающей поверхностью*. Напримѣръ, на черт. 248 изо-



Черт. 248.



Черт. 249.



Черт. 250.

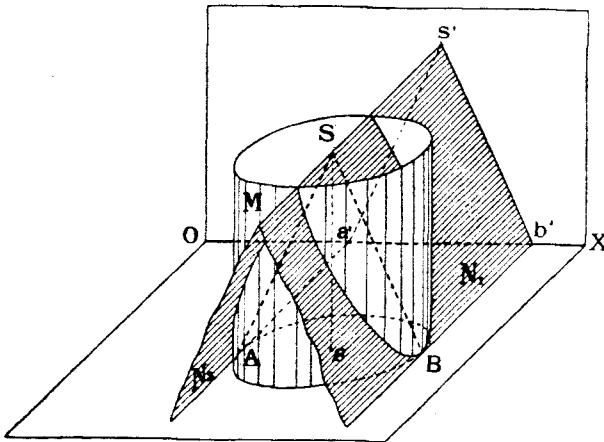
бражень шариковый подшипникъ, состоящій изъ ряда стальныхъ шариковъ, заключенныхъ въ двухъ цилиндрическихъ обоймахъ, поверхности которыхъ и являются обертывающими шарики.

При изображеніи кривыхъ поверхностей въ ортогональныхъ проекціяхъ мы будемъ часто пользоваться изображеніями контуровъ видимости поверхностей относительно каждой плоскости проекціи.

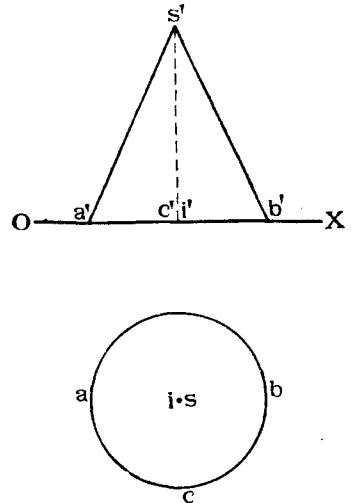
¹⁾ Классификація эта, съ нѣкоторыми нашими дополненіями, заимствована изъ соч. В. Курдюмова «Курсъ Начертательной Геометріи». Отдѣлъ I, часть II. СПб. 1897 г.

Контуромъ видимости поверхности относительно H или V называется линия касанія поверхности съ обертывающимъ ее цилиндромъ, производящія котораго перпендикулярны къ H или къ V .

Напримѣръ, шаръ (черт. 249) въ проекціяхъ (черт. 250) изображается часто двумя кругами-проекціями круговъ $AGDF$ и $ABDE$ касанія шара съ цилиндрами M и N перпендикулярными къ H и къ V . Кругъ $AGDF$ является контуромъ видимости шара относительно H , а кругъ $ABDE$ —контуромъ видимости шара относительно V .



Черт. 251.



Черт. 252.

Въ частномъ случаѣ цилиндръ касанія можетъ превращаться въ плоскость, какъ напримѣръ, при построеніи контура видимости на V конуса стоящаго на H (черт. 251 и 252). Въ этомъ случаѣ цилиндръ, обертывающій конусъ и проектирующій его на V , превращается въ двѣ плоскости N_1 и N_2 , касательныя къ конусу и перпендикулярныя къ V . Третьей плоскостью будетъ плоскость основанія конуса, т. е. H .

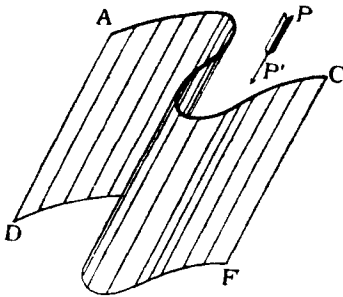
Контуромъ видимости конуса на V будетъ треугольникъ ASB (черт. 251), а на H —кругъ AB .

Перейдемъ теперь къ рассмотрѣнію различныхъ видовъ кривыхъ поверхностей, наиболѣе примѣняемыхъ въ техникѣ.

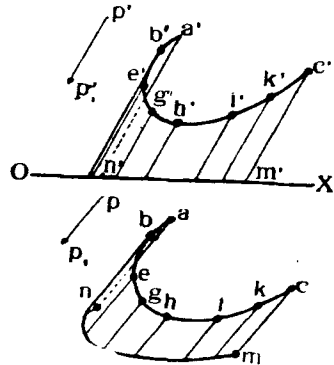
б) *Поверхности цилиндрическія или цилиндры.*

Такого рода поверхности образуются движеніемъ прямой линіи AB (черт. 253), во всѣхъ своихъ положеніяхъ остающейся параллельной нѣкоторому данному направленію PP_1 , причеиъ конецъ AB скользитъ по данной кривой линіи AC , называемой *направляющей цилиндра*.

На черт. 254 подобного рода цилиндрическая поверхность случайного вида изображена въ проекціяхъ, причѣмъ дана криволинейная ея направляющая AC и направленіе производящихъ PP_1 . Чтобы построить производящую цилиндра, проходящую черезъ любую точку C

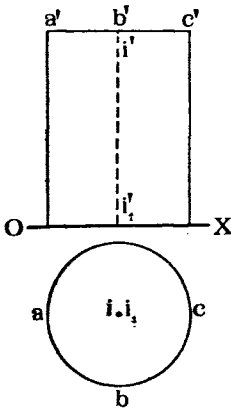


Черт. 253. Цилиндрическая поверхность.

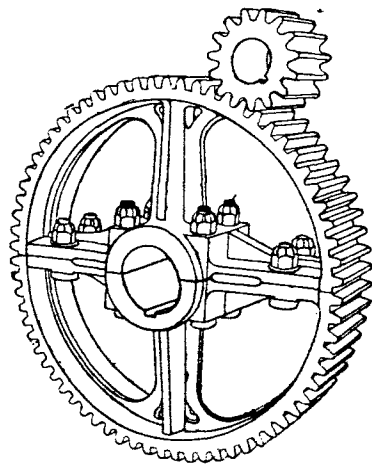


Черт. 254. Цилиндрическая поверхность.

направляющей, слѣдуетъ черезъ эту точку провести линію, параллельную направленію PP_1 . На чертежѣ построенъ рядъ такихъ производя-



Черт. 255. Прямой втуговой цилиндръ.

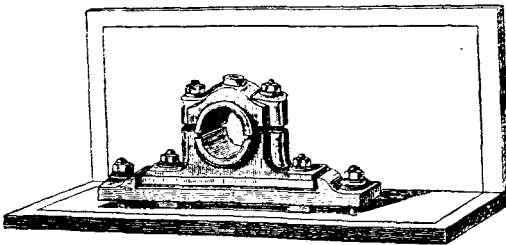


Черт. 256. Цилиндрическія зубчатые колеса.

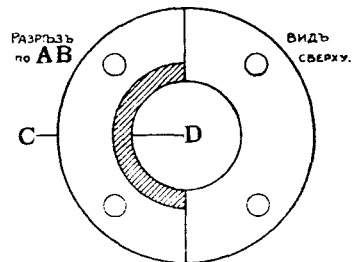
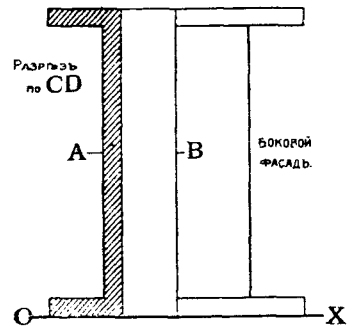
щихъ. Если мы найдемъ слѣды M , N и т. д. этихъ производящихъ на одной изъ плоскостей проекцій и соединимъ эти слѣды плавной кривою, то получимъ линію, называемую *слѣдомъ поверхности* на плоскости проекцій. На черт. 254 построенъ слѣдъ MN (mn , $m'n'$) цилиндра на плоскости H .

Если мы разсѣчемъ цилиндръ плоскостью нормальной къ направлению его производящихъ, то получимъ въ сѣченіи кривую линію, называемую *нормальнымъ сѣченіемъ* цилиндра. Въ зависимости отъ вида кривой нормального сѣчешя цилиндры раздѣляются на:

- 1) круговые,
- 2) эллиптическіе,
- 3) параболическіе,
- 4) овоидальные и др.

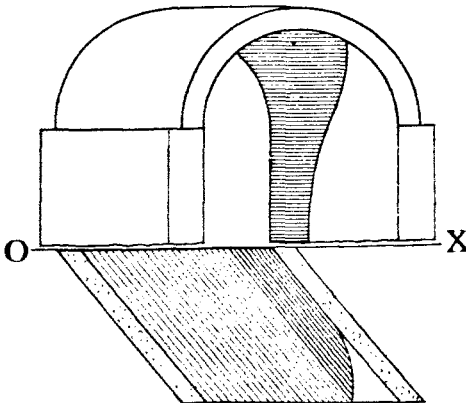


Черт. 257. Цилиндрический подшипникъ.

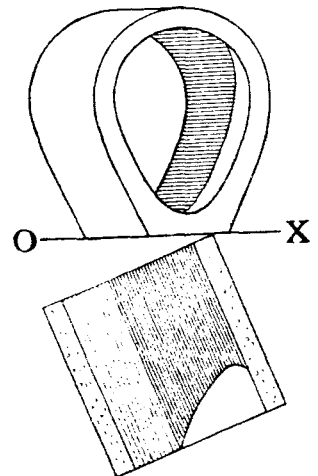


Черт. 258. Цилиндрическая фланцевая труба.

На черт. 255 изображенъ въ проекціяхъ цилиндръ круговаго нормальнаго сѣченія.



Черт. 259. Цилиндрический сводъ.



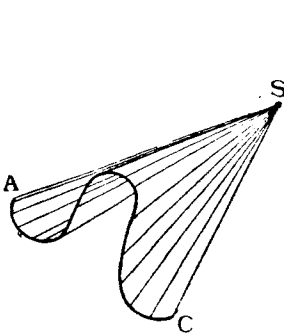
Черт. 260. Эвено цилиндрической (овоидальной) водосточной трубы.

Цилиндрическія поверхности находятъ себѣ широкое примѣненіе въ практикѣ, напримѣръ, въ зубчатыхъ колесахъ (черт. 256), въ подшипни-

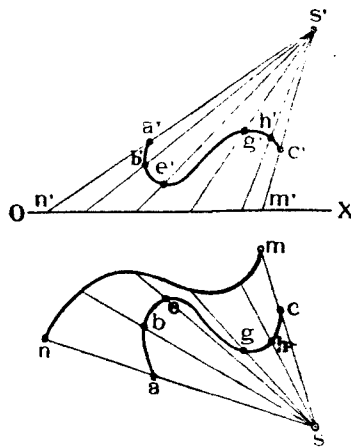
кахъ (черт. 257), въ флянцевыхъ трубахъ (черт. 258), въ сводахъ (черт. 259), въ водосточныхъ трубахъ (черт. 260) и т. д.

с) *Поверхности коническія или конуса.*

Коническія поверхности образуются движениемъ прямой линіи AS (черт. 261), при всѣхъ своихъ положеніяхъ проходящей черезъ одну и ту же точку S , называемую *вершиною* конуса. Другой конецъ производящей AS скользитъ по нѣкоторой кривой линіи AC , называемой *направляющей* конуса.



Черт. 261. Коническая поверхность.



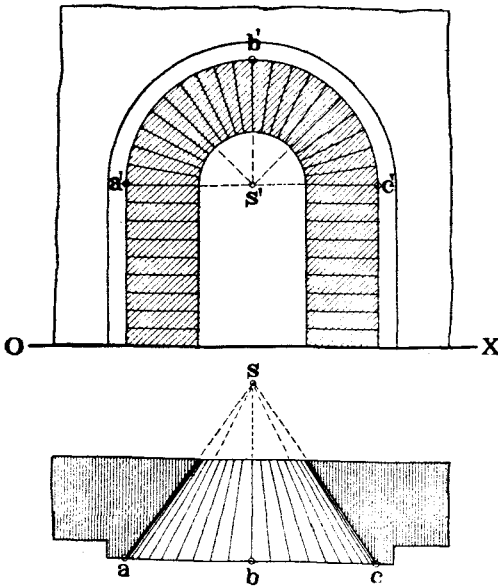
Черт. 262. Коническая поверхность.

На черт. 262 подобнаго рода коническая поверхность съ направляющей AC и вершиною S задана въ ортогональныхъ проекціяхъ. Заданъ рядомъ точекъ B, E, G, H на направляющей AC и соединимъ ихъ прямыми линіями AS, BS, ES и т. д. съ вершиною конуса. Эти линіи будутъ производящими конуса. Построимъ слѣды этихъ производящихъ, напримѣръ, на плоскости H и соединимъ ихъ плавной кривой MN . Линія MN называется *горизонтальнымъ слѣдомъ* конуса. Подобнымъ же образомъ можно построить и вертикальный слѣдъ конуса.

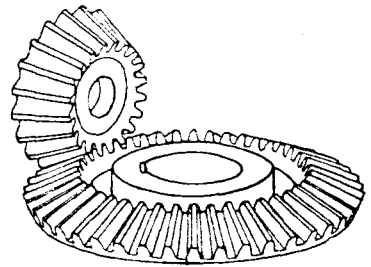
На черт. 252 изображенъ прямой круговой конусъ, стоящій на H . Ось SI этого конуса перпендикулярна къ направляющему кругу ABC и проходитъ черезъ его центръ. Если бы вмѣсто круга мы взяли эллипсъ, то получили бы эллиптическій конусъ. Коническіе поверхности часто примѣняются въ техникѣ, напримѣръ, для очертанія арокъ (черт. 263), зубчатыхъ колесъ (черт. 264) и т. д.

На черт. 265 показано примѣненіе эллиптического конуса SAC для

очертанія желѣзно-дорожной насыпи у стѣнки SBD каменнаго устоя. У этой стѣнки плоскій откосъ SAD насыпи сдѣланъ болѣе крутымъ, нежели откосъ $EFCS$. Поэтому, для сопряженія откосовъ разныхъ наклоновъ можно

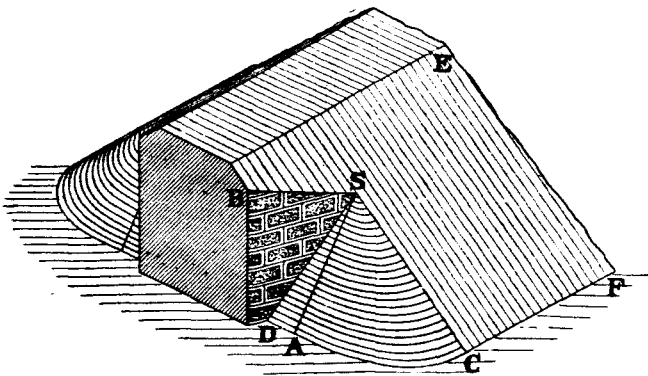


Черт. 263. Коническая арка.



Черт. 264. Коническія зубчатые колеса.

примѣнить поверхность F эллиптического конуса SAC , касательнаго къ обоимъ откосамъ по линіямъ SA и SC .

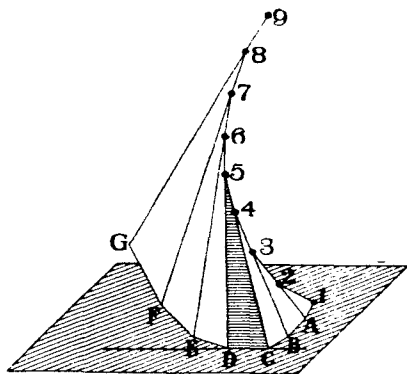


Черт. 265. Сопряженіе откосовъ земляного полотна при помощи эллиптическаго конуса.

б) *Поверхности съ ребромъ возврата.*

Представимъ себѣ въ пространствѣ кривую линію двойкой кривизны 1, 2, 3 ... 8, 9 (черт. 266). Намѣтимъ на этой кривой линіи рядъ точекъ 1, 2, 3 ... 8, 9 и соединимъ эти точки послѣдовательно между собой

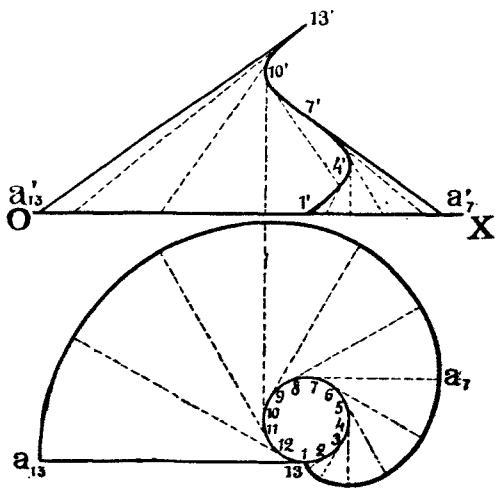
прямыми линиями. Тогда мы получимъ многоугольникъ, вписанный въ кривую линію. Продолжимъ стороны этого многоугольника; совокупность этихъ сторонъ образуетъ ребра нѣкотораго многогранника 123 ... 89GEE ... A1. Будемъ теперь увеличивать число сторонъ многоугольника, вписаннаго въ кривую линію, уменьшая длину ихъ. Тогда стороны многоугольника будутъ приближаться къ касательнымъ къ кривой въ точкахъ дѣленія, а ребра многогранника — къ производящимъ нѣкоторой кривой поверхности. Въ предѣлѣ, стороны многоугольника совпадутъ съ касательными къ кривой линіи, и многогранникъ превратится



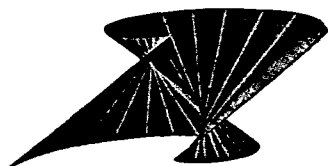
Черт. 266. Поверхность съ ребромъ возврата.

къ кривую поверхность, образованную совокупностью касательныхъ къ кривой линіи въ разныхъ ея точкахъ. Иначе такую поверхность можно представить себѣ образованной перекатываніемъ прямой линіи по кривой, причемъ прямая постоянно остается касательной къ кривой линіи.

Такъ какъ каждую касательную можно продолжить по обѣ стороны отъ точки касанія, то можно образовать двѣ части или *полы* поверхности, лежація съ разныхъ сторонъ кривой линіи, называемой *ребромъ возврата* по-



Черт. 268. Разверзаемый гелисоидъ.

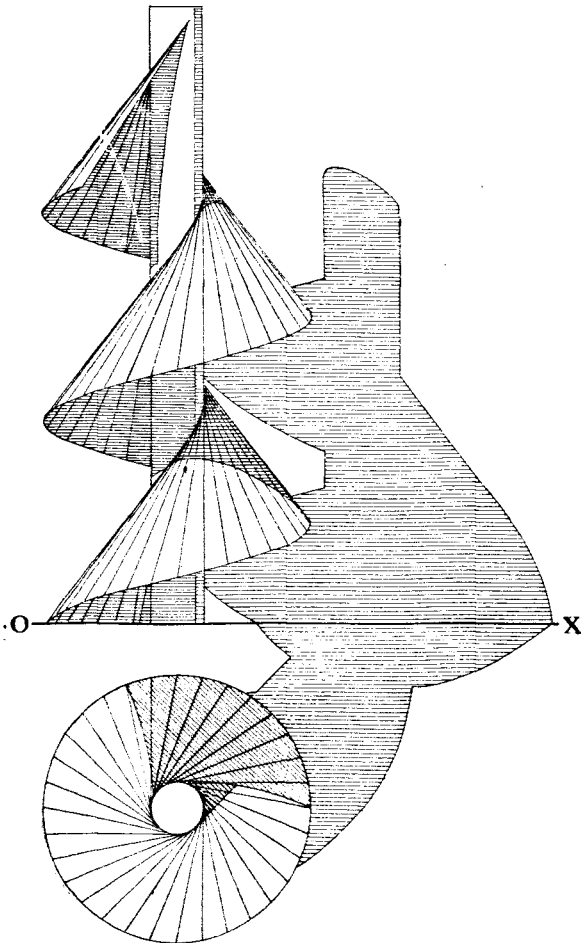


Черт. 267. Разверзаемый гелисоидъ.

верхности. Самая же поверхность, образованная такимъ образомъ, называется *поверхностью съ ребромъ возврата*, которая принадлежитъ къ поверхностямъ разверзаемымъ, такъ какъ каждая пара смежныхъ ея производящихъ пересѣкается между собой.

Въ зависимости отъ вида ребра возврата измѣняется и форма поверх-

ности. Если ребро возврата является винтовою цилиндрической линіей, то при перекатываніи по ней касательной образуется «разверзаемый гелисоидъ» (черт. 267). Для заданія его въ проекціяхъ достаточно показать проекціи винтовой линіи. Имѣя таковыя, нетрудно провести въ разныхъ точкахъ винтовой линіи касательныя къ ней, какъ было объ-

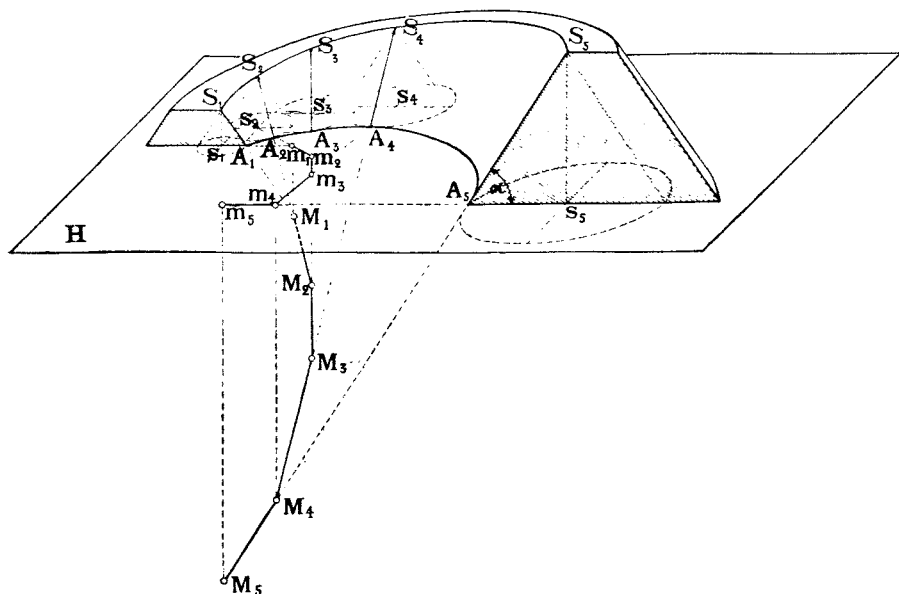


Черт. 269. Разверзаемый кольцевой гелисоидъ.

яснено на стр. 167. Совокупность этихъ касательныхъ и образуетъ разверзаемый гелисоидъ. На черт. 268 изображена въ проекціяхъ одна половина разверзаемаго гелисоида, соответствующаго одному обороту винтовой линіи, и построенъ слѣдъ $1A_7A_{13}$ его на плоскости H .

Представимъ себѣ круговой цилиндръ, одноосный съ винтовой линіей, ребромъ возврата гелисоида, но діаметра большаго, нежели вин-

товая линия. Нетрудно показать, что такой цилиндр разсѣчетъ гелисоидъ по цилиндрической винтовой линіи того же шага, что и ребро возврата. Доказательство слѣдуетъ изъ того, что отрѣзки производящихъ гелисоида между ребромъ возврата и цилиндромъ всё одинаковой длины, всё одинаково наклонены къ H , всё касательны къ ребру возврата, и одинъ конецъ ихъ скользятъ по ребру возврата; слѣдовательно и другой конецъ будетъ также описывать винтовую цилиндрическую линію того же шага, что и ребро возврата. Гелисоидъ, ограниченный ребромъ возврата и упомянутой линіей сѣченія называется *разверзаемымъ кольцевымъ гелисоидомъ* (черт. 269).

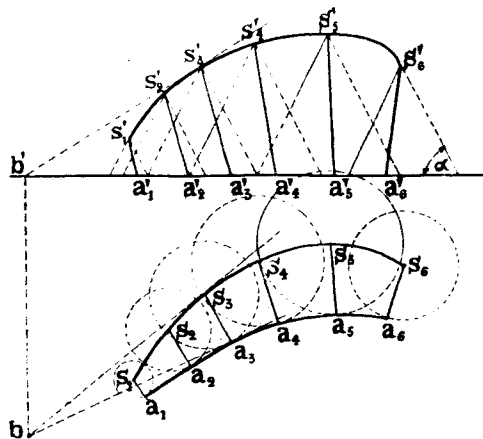


Черт. 270. Поверхность одинаковаго ската въ примѣненіи къ очертанію откосовъ желѣзнодорожной насыпи на кривой и на уклонѣ.

Другимъ примѣромъ поверхности съ ребромъ возврата можетъ служить *поверхность одинаковаго ската*, примѣняемая для очертанія откосовъ желѣзнодорожной насыпи на уклонѣ и на кривой (черт. 270). Всѣ производящія M_1S_1 , M_2S_2 , ..., M_5S_5 одинаково наклонены подъ нѣкоторымъ угломъ α къ данной плоскости H и касательны къ нѣкоторой линіи M_1M_5 —ребру возврата этой поверхности.

Если кривая S_1S_5 является бровкой насыпи, то ту же поверхность откоса ея можно представить себѣ образованной еще и слѣдующимъ образомъ. Пусть въ пространствѣ движется прямой круговой конусъ, ось котораго остается все время вертикальной, производящія наклонены подъ угломъ α къ горизонту, а вершина S скользятъ по линіи S_1S_5 .

Тогда кривая поверхность, обертывающая различныя положенія этого конуса, и будетъ поверхностью одинаковаго ската, которая, касаясь различныхъ конусовъ по ихъ производящимъ, будетъ имѣть свои производящія наклоненными подь однимъ и тѣмъ же угломъ α къ плоскости H . Часть поверхности одинаковаго ската между двумя смежными производящими можно, съ извѣстнымъ приближеніемъ, разсматривать какъ коническую поверхность. Напримѣръ, поверхность $A_4A_5S_5S_4$ можно считать образованную движеніемъ линіи M_4S_4 , проходящей черезъ точку M_4 , и во всѣхъ своихъ положеніяхъ остающейся одинаково наклоненной къ H . При такихъ условіяхъ образуется поверхность прямого круговаго конуса съ осью M_4m_4 , перпендикулярной къ H .



Черт. 271. Поверхность одинаковаго ската.

Сѣченіе этого конуса съ H дастъ дугу круга A_4A_5 съ центромъ въ точкѣ m_4 . Продолжая разсужденія подобнымъ же образомъ, мы, съ извѣстнымъ приближеніемъ, можемъ горизонтальный слѣдъ $A_1—A_6$ поверхности одинаковаго ската принять составленнымъ изъ взаимно касательныхъ дугъ круговъ

A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_5 съ центрами въ точкахъ m_1 , m_2 , m_3 и m_4 .

На черт. 271 поверхность одинаковаго ската изображена въ проекціяхъ. Задана направляющая линія S_1S_6 , и данъ уголъ α наклона производящихъ конуса къ B .

Для построенія горизонтальнаго слѣда и производящихъ поверхности поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Задаемся рядомъ положеній движущагося конуса и строимъ круги—слѣды ихъ на H .

Проводимъ по лекалу линію $a_1—a_6$, обертку этихъ слѣдовъ, которая и будетъ служить горизонтальнымъ слѣдомъ поверхности одинаковаго ската.

Для построенія любой производящей этой поверхности проводимъ изъ какой нибудь точки s_3 , горизонтальной проекціи одной изъ вершинъ движущагося конуса, нормаль къ кривой a_1a_6 , т. е. радиусъ s_3a_3 круга съ центромъ въ s_3 , проведенный въ точку a_3 касанія этого круга съ оберткой. Находимъ точки s_3' и a_3' на V . Линія S_3A_3 и будетъ искомой производящей. Ту же производящую можно было бы найти еще и слѣдующимъ образомъ. Проводимъ черезъ точку S_3 касательную S_3B къ кривой S_1S_6 и находимъ горизонтальный слѣдъ B ея.

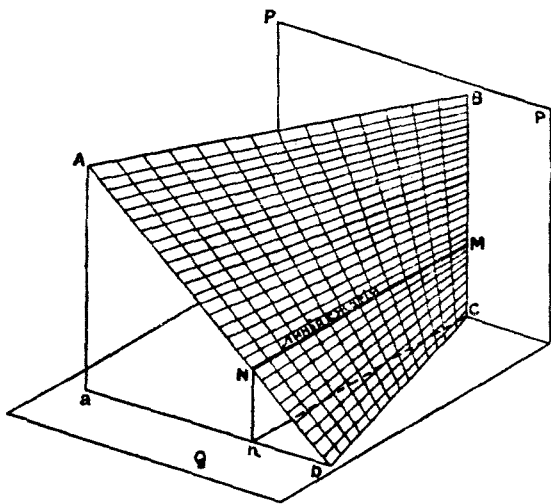
Проводимъ черезъ точку B линію, касательную къ кругу основанія конуса S_3 .

Точка касанія A_3 съ точкой S_3 и опредѣлитъ искомую производящую S_3A_3 . Доказательство слѣдуетъ изъ того, что плоскость S_3BA_3 будетъ общей касательной какъ къ конусу, такъ и къ поверхности одинаковаго ската.

На чертежѣ 271 построенъ рядъ производящихъ S_1A_1 , S_2A_2 и т. д. поверхности.

е) *Гиперболическіе параболоиды или косыя плоскости.*

Представимъ себѣ въ пространствѣ двѣ прямыя линіи AB и CD , не лежащія въ одной плоскости (черт. 272). Соединимъ концы этихъ



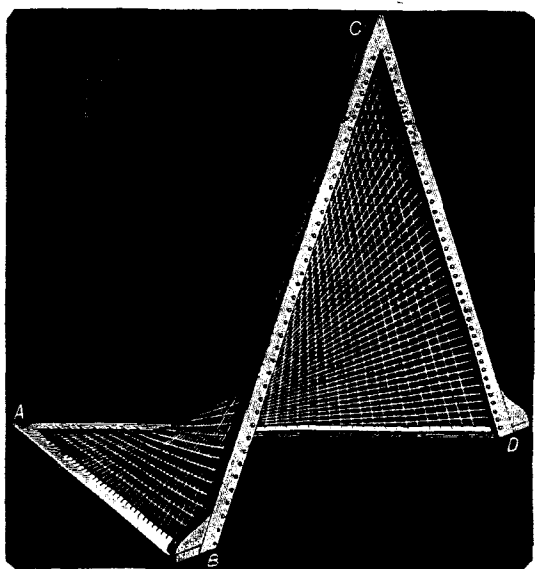
Черт. 272. Гиперболическій параболоидъ или косая плоскость.

линій прямыми AD и BC , которыя также не будутъ лежать въ одной плоскости. Проведемъ черезъ линію CD плоскость Q параллельную AB . Разсѣчемъ теперь линіи AB и CD рядомъ плоскостей, параллельныхъ Q , и соединимъ полученныя точки пересѣченія прямыми линіями, которыя, очевидно, будутъ параллельны плоскости Q . Далѣе, проведемъ черезъ BC плоскость P , параллельную AD , разсѣчемъ линіи AB и BC плоскостями, параллельными P , и соединимъ полученныя точки пересѣченія прямыми линіями, которыя, очевидно, будутъ параллельны P .

Всѣ упомянутыя линіи образуютъ кривую поверхность, называемую *гиперболическимъ параболоидомъ или косою плоскостью*. Линіи AB , CD , AD , BC и другія вышеупомянутыя—называются *производящими* этой поверхности. Плоскости P и Q , параллельно которымъ располагаются производящія, называются *плоскостями параллелизма* косою плоскости.

Косую плоскость можно представить также образованную движеніемъ производящей прямой линіи CD , постоянно пересѣкающей двѣ не лежащія въ одной плоскости прямыя AD и BC и постоянно остающейся параллельной плоскости Q . Въ этомъ случаѣ линіи AB и BC называются *направляющими* косой плоскости.

Ту же косую плоскость можно образовать и движеніемъ производящей прямой линіи BC , постоянно пересѣкающей двѣ, не лежащія въ одной плоскости, прямыя AB и DC и постоянно остающейся параллельной плоскости P . Въ этомъ случаѣ линіи AB и CD называются *направляющими* косой плоскости.



Черт. 273. Гиперболическій параболоидъ или косая плоскость.

Часто линіи AB и CD называютъ производящими одного направленія, а линіи AD и BC —производящими другого направленія.

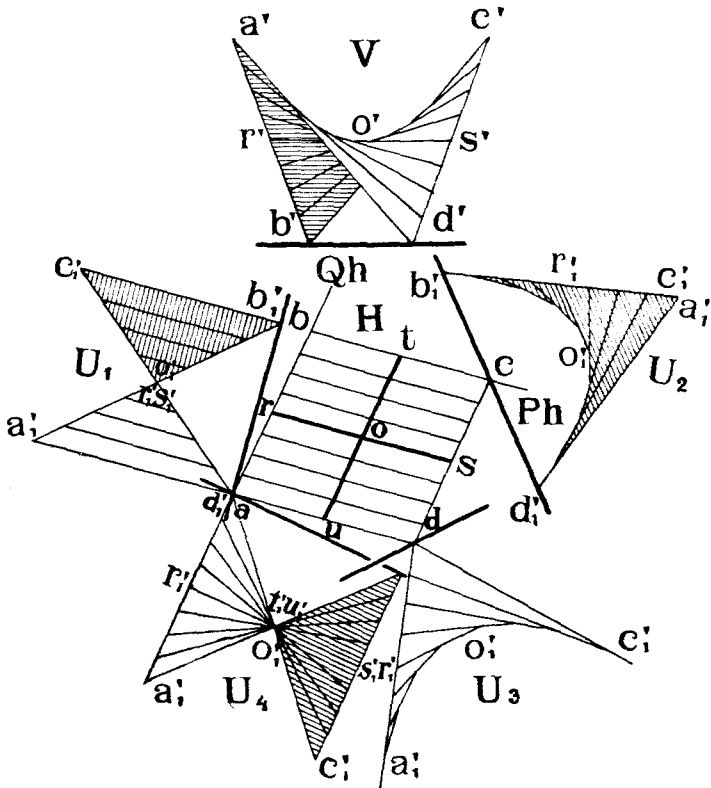
Если плоскости параллелизма P и Q взаимно перпендикулярны, какъ это и показано на чертежѣ 272, то косая плоскость называется *прямою*. Въ противномъ случаѣ она называется *наклонною*.

На каждой парѣ смежныхъ производящихъ всегда можно отыскать двѣ ближайшія другъ къ другу точки (см. стр. 78).

Линія, соединяющая всѣ подобныя точки на кривой поверхности, называется *линіей сжатія* поверхности, и такъ какъ на поверхности имѣется двѣ системы производящихъ, то, слѣдовательно, на ней будетъ и двѣ линіи сжатія.

На черт. 272 изображены таковыя линіи сжатія MN и RC для прямой косої плоскости. Въ этомъ случаѣ линіи сжатія превращаются въ прямыя линіи, перпендикулярныя къ плоскостямъ параллелизма.

На черт. 273 изображенъ общій видъ гиперболическаго параболоида или косої плоскости.

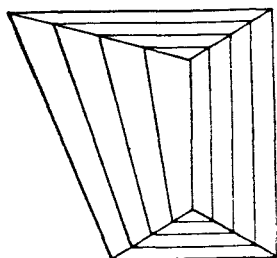


Черт. 274. Гиперболическій параболоидъ или косоя плоскость.

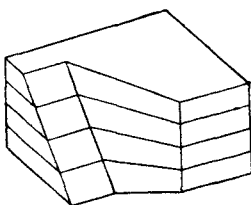
На черт. 274 косоя плоскость изображена въ проекціяхъ въ разныхъ видахъ. Задана она направляющими AB и CD , параллельными плоскости Q , и производящими AD и BC , параллельными плоскости P . Плоскости P и Q выбраны перпендикулярными къ B .

Такъ какъ P не перпендикулярна къ Q , то слѣдовательно задана наклонная косоя плоскость. Для того, чтобы построить случайную производящую, на примѣръ, параллельную P и проходящую черезъ точку S линіи CD , проводимъ черезъ S плоскость параллельную P , и находимъ точку R пересѣченія этой плоскости съ AB . Линія SR и будетъ искомой.

На черт. 272 изображены проекціи косої плоскости на слѣдующихъ плоскостяхъ проекцій:

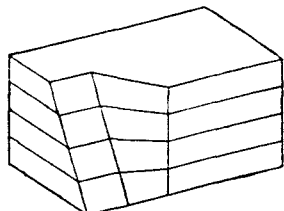


Черт. 275. Примѣненіе косої плоскости къ образованію крыши.



Черт. 276.

Примѣненіе косої плоскости къ образованію набережныхъ.



Черт. 277.

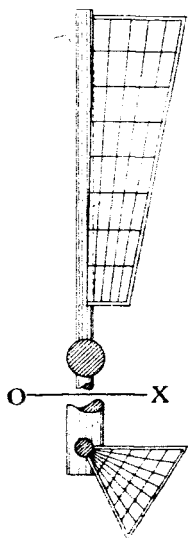
- 1) V , 2) H , 3) $U_1 \perp H$ и $\perp P$, 4) $U_2 \perp H$ и $\parallel BD$, 5) $U_3 \perp H$ и $\parallel AC$, 6) $U_4 \perp H$ и $\perp Q$.

Косая плоскость довольно часто примѣняется на практикѣ.

На черт. 275 показано примѣненіе ея къ образованію двухъ боковыхъ скатовъ крыши, перекрывающей зданіе, имѣющее въ планѣ видъ трапеціи, причемъ конекъ крыши горизонтальный.

На черт. 276 и 277 показано два примѣра примѣненія косої плоскости для ограниченія боковой стѣнки набережной при переходѣ отъ наклонной ея грани къ вертикальной.

На черт. 278 показано примѣненіе косої плоскости къ образованію поверхности лопасти колеса вѣтряной мельницы.



Черт. 278. Примѣненіе косої плоскости къ образованію поверхности крыла вѣтряной мельницы.

f) Цилиндроида.

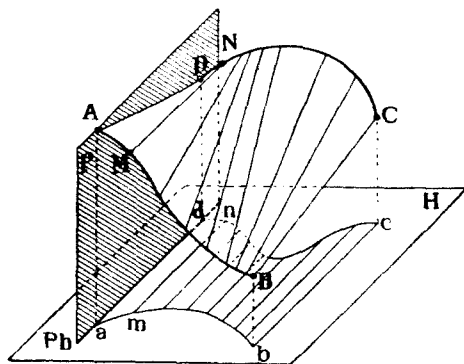
Цилиндроидомъ называется поверхность, образованная движениемъ производящей прямой линіи AD (черт. 279), концы которой скользятъ по двумъ не лежащимъ въ одной плоскости кривымъ направляющимъ AB и CD , и которая постоянно остается параллельной нѣкоторой плоскости P , называемой плоскостью параллелизма цилиндроида.

Для изображенія цилиндроида въ проекціяхъ (черт. 280) необходимо задаться проекціями его направляющихъ AB и CD и плоскостью параллелизма P , или же вмѣсто P положеніемъ двухъ производящихъ, на примѣръ AD и DC , такъ какъ тогда легко опредѣлить плоскость P , параллельную AD и BC .

Для построения случайной производящей цилиндриды поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Если плоскость параллелизма цилиндриды задана случайно, то сначала, при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій, переходимъ къ такой системѣ, въ которой плоскость P заняла бы положеніе, перпендикулярное къ одной изъ плоскостей проекцій.

На черт. 279 показанъ случай, когда $P \perp H$.

При этомъ горизонтальныя проекціи производящихъ спроектируются на H въ видѣ прямыхъ, параллельныхъ Ph , что облегчаетъ ихъ построение. Для построения случайной производящей цилиндриды, проходящей напримѣръ, черезъ точку M ея направляющей, проводимъ черезъ M плоскость $Q \parallel P$ ($Qh \parallel Ph$) и находимъ точку N пересѣченія кривой BC съ Q . Линія MN и будетъ искомой производящей.

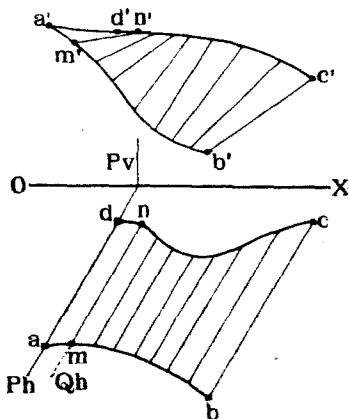


Черт. 279. Цилиндрида.

Цилиндриды можно также образовать движениемъ прямой линіи параллельно плоскости параллелизма, причемъ прямая можетъ: 1) или касаться двухъ какихъ нибудь кривыхъ поверхностей, 2) или касаться одной кривой поверхности и пересѣкать одну кривую линію.

На черт. 281 показаны проекціи одного изъ частныхъ видовъ цилиндриды, именно, *винтовой цилиндриды*.

Поверхность эта образована движениемъ прямой линіи, пересѣкающей винтовую линію AB и касательной къ одному съ AB круговому цилиндру. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ оси цилиндра. Для построения случайной производящей, проходящей черезъ точку M направляющей AB , проводимъ черезъ m касательную mn къ кругу, проекціи на H цилиндра, а черезъ m' —прямую $m'n'$ параллельную OX . При такихъ условіяхъ прямая MN будетъ производящей цилиндра.



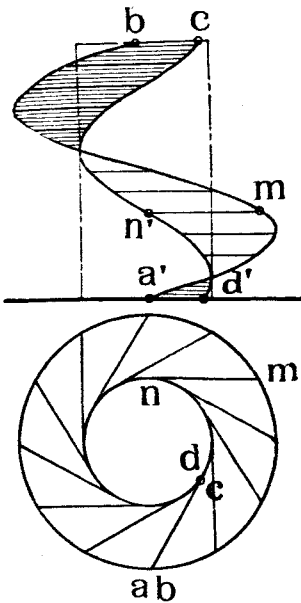
Черт. 280. Цилиндрида.

Геометрическое мѣсто точекъ N касанія производящихъ съ цилинд-

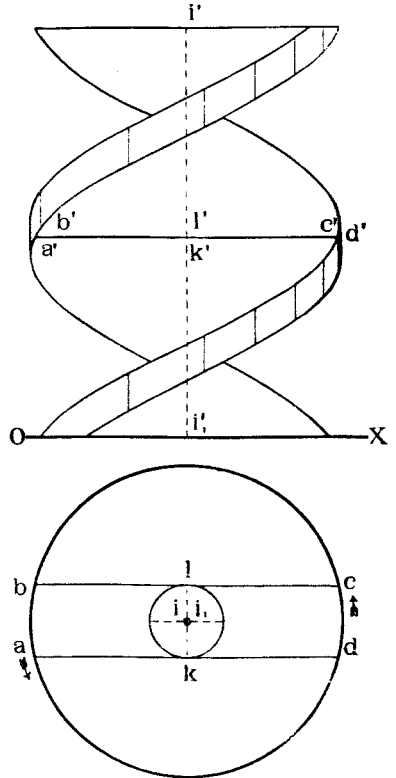
ромъ образуетъ цилиндрическую винтовую линію CND , одноосную съ данной винтовой линіей AB и того же шага.

На черт. 282 показанъ въ проекціяхъ примѣръ комбинаціи двухъ поверхностей винтового цилиндрида, образующихъ витой стержень. Направляющій круговой цилиндръ съ осью II перпендикуляренъ къ H , которая служитъ плоскостью параллелизма. Производящими служатъ двѣ прямыя линіи AD и DC , параллельныя H и касательныя къ цилиндру съ двухъ сторонъ его въ точкахъ K и L , причемъ $AK = KD = CL = LD$. Черезъ точки A и B , D и C проведены дуги круговъ

AB и CD съ центромъ на оси II . Концы A , D , C и D производящихъ скользятъ по четыремъ винтовымъ линіямъ, однооснымъ съ цилиндромъ. При движеніи упомянутыхъ производящихъ образуются два винтовыхъ цилиндрида, пѣзъ которыхъ каждый ограниченъ винтовой линіей касанія на направляющемъ цилиндрѣ, напримѣръ, проходящей черезъ точку K и двумя наружными



Черт. 281. Винтовой цилиндрида.



Черт. 282. Сочетаніе двухъ винтовыхъ цилиндридовъ.

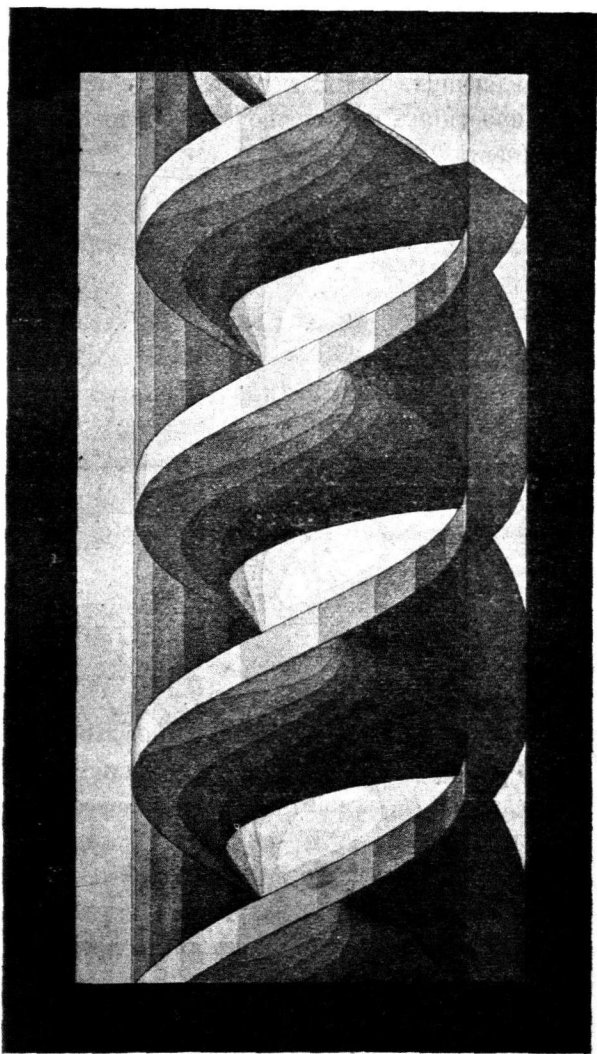
винтовыми линіями, напримѣръ, проходящими черезъ точки A и D . Всѣ эти винтовыя линіи будутъ одинаковаго шага. Дуги круговъ AN и DC опишутъ части двухъ круговыхъ цилиндрическихъ поверхностей съ осью II .

На чертежѣ 283 показана одна вертикальная проекція образованнаго тѣла съ тѣнями.

Цилиндриды примѣняются иногда для очертанія сводовъ.

На черт. 284 показана въ планѣ лѣстничная домовая клѣтка квадратнаго сѣченія съ центральнымъ каменнымъ столбомъ также квадратнаго сѣченія. Вокругъ этого столба идетъ витая лѣстница, ступеньки которой должны поддерживаться сводами, опирающимися на столбъ и на стѣны

клетки. Сводчатая поверхность образована цилиндридами. Одна из таких поверхностей для части $abcd$ изображена на чертежѣ. Плоскостью параллелизма служит плоскость стѣны BC . Направляющими служатъ

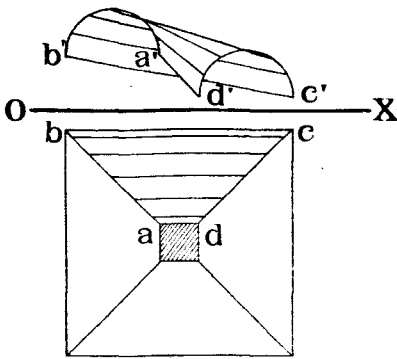


Черт. 283. Витой стержень, ограниченный поверхностями двухъ винтовыхъ цилиндридовъ и обыкновенной цилиндрической.

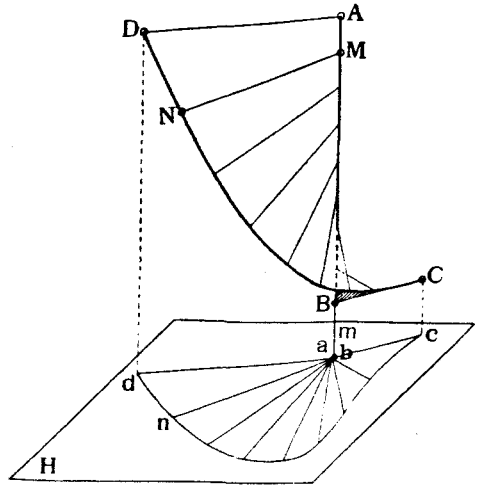
эллипсы AB и DC , диаметры AB и DC которыхъ горизонтальны, и которые образованы такъ, что проектируются на стѣны клетки въ видѣ круговъ. Крайними производящими являются прямая AD и BC , соединяющія концы диаметровъ эллипсовъ.

г) *Конюиды.*

Конюидомъ называется поверхность (черт. 285), образованная движением производящей прямой линии AD параллельно некоторой плоскости H , называемой плоскостью параллелизма; при этом производящая пересекает двѣ направляющих линии: кривую DC и прямую AB . Для задания конюида въ проекціяхъ достаточно задать проекціи его направляющих AB в DC (черт. 286) и плоскость параллелизма H .



Черт. 284. Примѣненіе цилиндриды къ образованію свода.



Черт. 285. Конюидъ.

Чтобы построить проекціи какой нибудь производящей, напримѣръ, проходящей черезъ точку M , достаточно провести черезъ послѣднюю плоскость, параллельную H , и найти точку N пересѣченія кривой DC съ этой плоскостью. Прямая NM и будетъ искомой производящей. Наиболее удобнымъ для проведенія производящихъ является такое положеніе конюида, когда плоскость параллелизма его перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій, такъ какъ тогда проекціи на эту плоскость производящихъ будутъ параллельны слѣду плоскости параллелизма на той же плоскости проекцій, что облегчаетъ построеніе производящихъ.

Конюидъ можетъ быть образованъ также движениемъ прямой, пересекающей направляющую прямую линию и касательной некоторой поверхности, причемъ, конечно, прямая должна двигаться параллельно данной плоскости параллелизма.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ задания конюида.

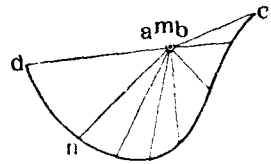
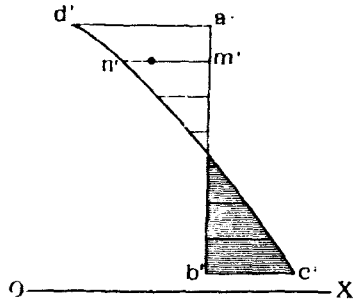
Винтовой конюидъ или неразверзаемый гелисоидъ (черт. 287), образуется движениемъ прямой, пересекающей цилиндрическую винтовую линию DC и ея ось AB . Плоскость параллелизма расположена перпенди-

кулярно къ оси AB . Для построения проекцій случайной производящей коноида, проходящей через точку M , проводимъ через m' прямую $m'n' \parallel OX$ до пересѣченія съ $d'c'$ въ точкѣ n' ; проектируемъ n' на dc въ точку n . Прямая $m'n'$ и mn и будетъ искомой производящей.

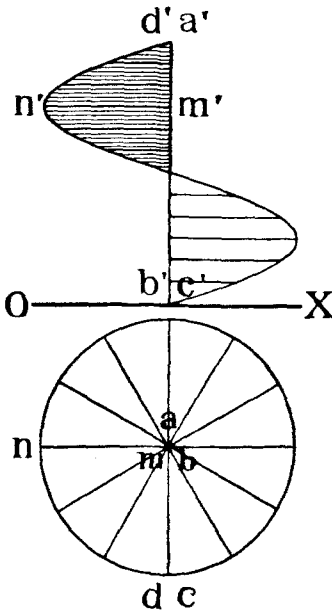
Разсѣчемъ винтовой коноидъ круговымъ цилиндромъ, осью котораго служила бы линия AB (черт. 288). Этотъ цилиндръ пересѣчетъ коноидъ по цилиндрической винтовой линіи EF , того же шага, что и DC и съ той же осью AB .

Поверхность между винтовыми линіями DC и EF называется *кольцевымъ винтовымъ коноидомъ* и весьма часто примѣняется въ техникѣ.

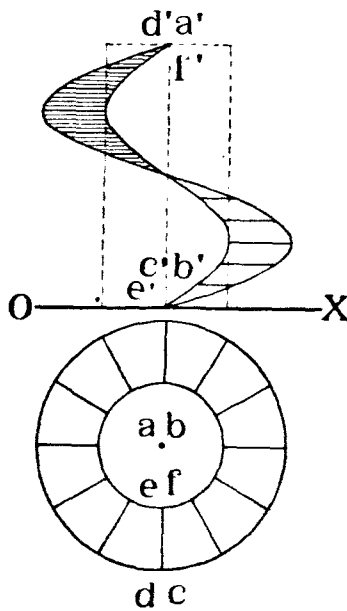
На черт. 289 показано примѣненіе этой поверхности къ очертанію простѣйшаго прибора для подъема воды и называемаго *Архимедовымъ винтомъ*.



Черт. 286. Коноидъ.



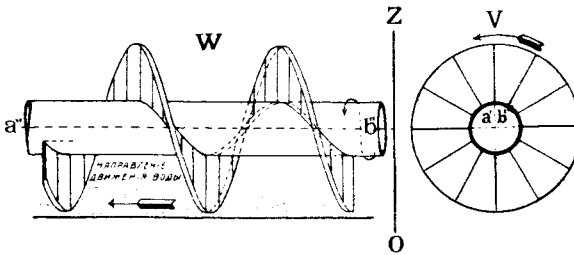
Черт. 287. Винтовой коноидъ или неразверзаемый гели-соидъ.



Черт. 288. Кольцевой винтовой коноидъ.

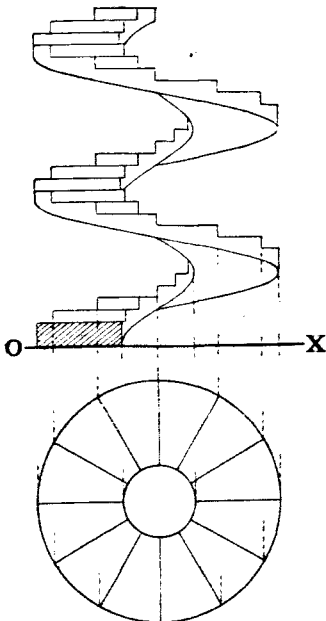
Вокругъ оси AB вращается площадка ограниченная двумя прямыми

линіями $\perp AB$, продолженіе которыхъ пересѣкаетъ AB , и двумя дугами круговъ. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ AB .



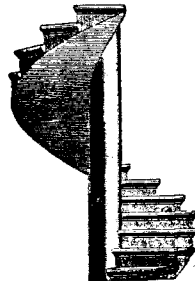
Черт. 289. Архимедовъ винтъ (кольцевой винтовой коноидъ).

На черт. 290 показано примѣненіе винтового кольцевого коноида къ образованію винтовой лѣстницы, а на черт. 291 изображенъ общій видъ такой лѣстницы.



Черт. 290. Винтовая лѣстница (кольцевой винтовой коноидъ).

На черт. 292 показано примѣненіе той же поверхности къ очертанію цилиндрической пружины. Вокругъ оси AB пружины вращается прямоугольникъ $CDEF$, плоскость котораго все время проходитъ черезъ AB и вершины котораго скользятъ по винтовымъ линіямъ одинаковаго шага, осью которыхъ служатъ AB .



Черт. 291. Винтовая лѣстница (кольцевой винтовой коноидъ).

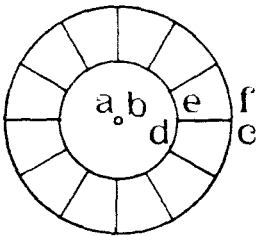
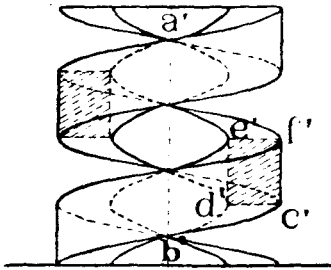
На черт. 293 и 294 показаны еще примѣненія той же поверхности къ очертанію винтовой прямоугольной нарѣзки винтовъ, а на черт. 295—къ очертанію внутренней нарѣзки муфты, навинчиваемой на такіе винты.

Если вокругъ оси AB будетъ вращаться не одинъ

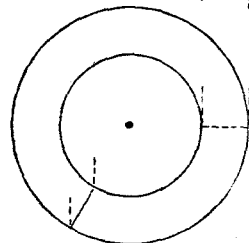
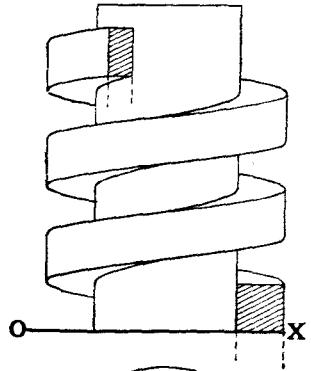
прямоугольникъ, какъ то показано на черт. 293, а нѣсколько, то получается винтъ съ нѣсколькими витками, напримѣръ, съ четырьмя, какъ изображено на черт. 296.

Если коноидъ образованъ движеніемъ прямой по двумъ направляющимъ: прямой AB (черт. 297) и дугѣ круга DFC , причемъ и AB и плоскость DFC перпендикулярны къ плоскости параллелизма H , то такой

коноидъ называется *прямымъ*. Эта поверхность примѣняется къ очертанію арокъ для оконъ и дверей въ прямыхъ стѣнахъ зданій (черт. 297).



Черт. 292. Цилиндрическая пружина (кольцевые винтовые коноиды и круговые цилиндры).

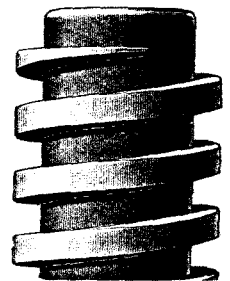


Черт. 293. Винтъ съ прямоугольной наръзкой. (Примѣніе кольцевого винтового коноида).

Иногда коноидъ примѣняется и для очертанія сводиковъ въ проемахъ, сдѣланныхъ въ цилиндрическихъ башняхъ (черт. 298). Направляющими служатъ: ось *AB* башни и какая нибудь кривая, начерченная на наружной поверхности башни, на примѣръ, *DEC*. Плоскость параллелизма перпендикулярна къ оси башни.

h) *Косые цилиндры о трехъ направляющихъ.*

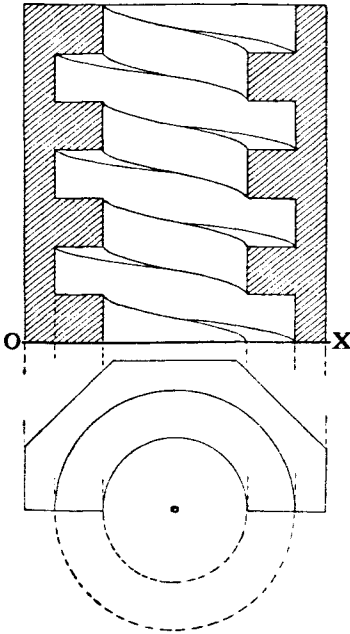
Косымъ цилиндромъ о трехъ направляющихъ называется поверхность, образованная движеніемъ прямой линіи *MQ* (черт. 299), которая должна пересѣкать три не лежащія въ одной плоскости направляющія *AB*, *CD* и *FF'*, изъ которыхъ хотя бы одна должна быть кривой линіей.



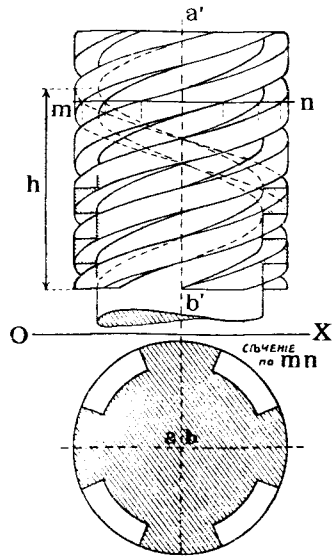
Черт. 294. Винтъ съ прямоугольной наръзкой (Примѣненіе кольцевого винтового коноида).

На чертежѣ 299 показанъ приемъ опредѣленія случайнаго положенія такой производящей. Выбираемъ какую-нибудь точку *M* на направляющей *AB* и соединяемъ ее съ различными точками направляющей *EF*

прямыми линиями, совокупность которых, въ общемъ случаѣ заданія, образуетъ нѣкоторую коническую поверхность.

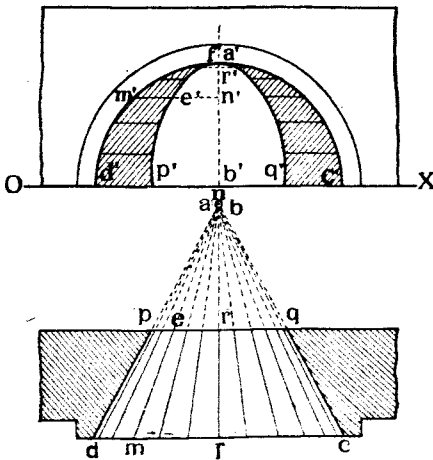


Черт. 295. Муфта съ прямоугольной нарѣзкой. (Примѣненіе кольцевого винтового коноида).

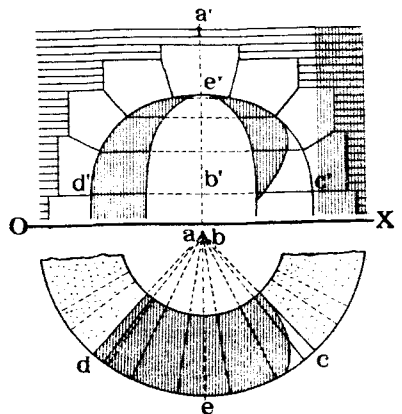


Черт. 296. Винтъ съ четырьмя прямоугольными витками. (Примѣненіе кольцевыхъ винтовыхъ коноидовъ).

Находимъ точку N встрѣчи третьей направляющей CD съ этой по-



Черт. 297. Прямой коноидъ въ примѣненіи къ образованію арки.



Черт. 298. Прямой коноидъ въ примѣненіи къ образованію арки.

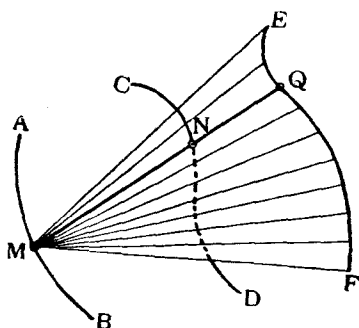
верхностью и соединяемъ точки N и M . Прямая MN и будетъ искомою

производящей косо́го цилиндра, такъ какъ она пересѣкаетъ направляющія въ точкахъ M , N и Q .

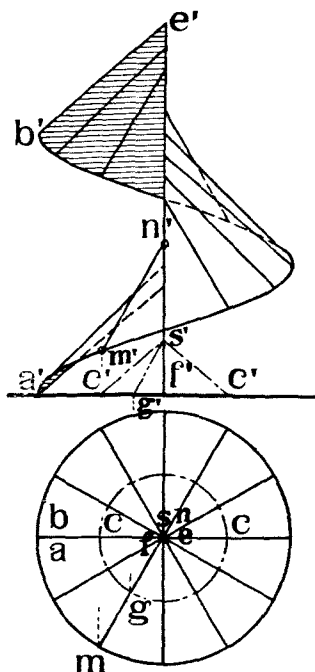
Вмѣсто линіи, направляющей можетъ служить какая-нибудь кривая поверхность, которой должна касаться производящая при всѣхъ своихъ положеніяхъ.

Наконецъ, вмѣсто линіи, направляющей можетъ служить кривая поверхность, параллельно послѣдовательнымъ производящимъ которой должна двигаться производящая косо́го цилиндра, пересѣкая двѣ другихъ направляющихъ линіи.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ заданія косо́го цилиндра о трехъ направляющихъ.



Черт. 299. Косо́й цилиндръ о трехъ направляющихъ.

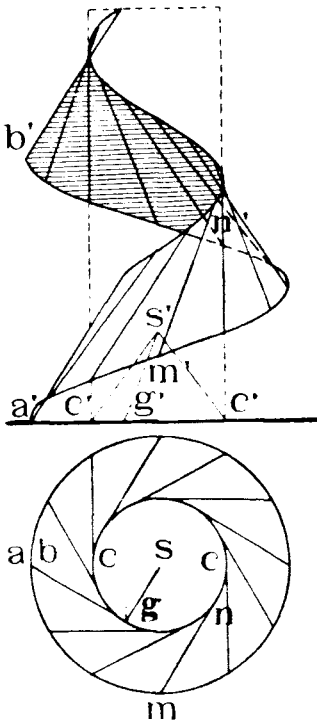


Черт. 300. Косо́й гелисоидъ.

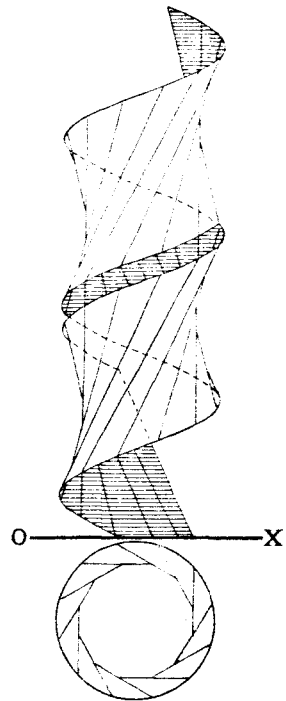
Косо́й гелисоидъ образуется движеніемъ прямой линіи, пересѣкающей цилиндрическую винтовую линію AB (черт. 300), ея ось EF и параллельную при своемъ движеніи послѣдовательнымъ производящимъ прямого круговаго конуса SCC , однооснаго съ винтовой линіей. Чтобы построить какую-нибудь производящую гелисоида, проходящую черезъ точку M на направляющей AB , поступаемъ слѣдующимъ образомъ: соединяемъ m съ точкой n , служащей горизонтальной проекціей EF . Линія mn должна служить горизонтальной проекціей искомой производящей. Находимъ на направляющемъ конусѣ производящую, горизонтальная проекція которой была бы параллельна mn .

Таковой производящей является линія GS . Проводимъ теперь черезъ m' прямую $m'n'$, параллельную $g's'$, до пересѣченія съ $e'f'$ въ точкѣ n' . Прямая MN и будетъ искомой производящей косо́го гелисоида, такъ какъ она пересѣкаетъ направляющія въ точкахъ M и N и параллельна производящей GS конуса.

Такъ какъ изъ точки m можно провести двѣ касательныя къ кругу основанія цилиндра и для этихъ двухъ касательныхъ можно найти на поверхности конуса четыре соответствующихъ производящихъ, то, поэтому, при такомъ заданіи можно построить четыре гелисоида.



Черт. 303. Кольцевой гелисоидъ.



Черт. 304. Косой кольцевой гелисоидъ.

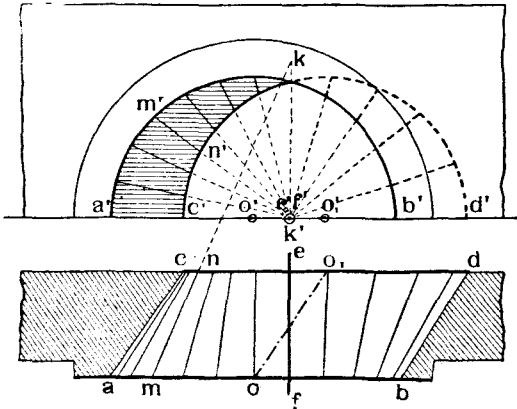
На черт. 304 показанъ еще примѣръ косога гелисоида, образованнаго движеніемъ производящей прямой линіи, концы которой скользятъ по двумъ однооснымъ цилиндрическимъ винтовымъ линіямъ одинаковаго шага и радіуса, причеиъ производящая все время касается прямого круговаго цилиндра, однооснаго съ винтовыми линіями.

Косой цилиндръ для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Такого рода гелисоидъ образуется движеніемъ прямой линіи, пересекающей двѣ вертикальныя, параллельныя и равныя другъ другу дуги полукруговъ AB и CD и прямую EF , перпендикулярную къ плоскостямъ круговъ (черт. 305).

Построимъ какую-нибудь производящую поверхности, наприиѣръ, про-

ходящую через точку M полукруга AB . Для этого проведемъ через M и прямую EF плоскость и найдемъ точку N пересѣченія этой плоскости съ полукругомъ CB . Вертикальная проекція n' точка N будетъ лежать на пересѣченіи $c'd'$ съ $m'e'$.



Черт. 305. Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ, примѣняемый для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Соединяя M съ N прямой, получимъ искомую производящую MN , которая пересѣчетъ прямую EF въ точкѣ K (k, k'). На чертежѣ 306 изображенъ общій видъ этой поверхности ¹⁾.



Черт. 306. Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ, примѣняемый для образованія сводовъ надъ косыми проходами.

Другой случай примѣненія подобной же поверхности показанъ на черт. 307, на которомъ изображенъ такъ называемый Марсельскій сводъ. Поверхность его образована движеніемъ прямой по тремъ направляющимъ: дугѣ круга AB съ центромъ въ O_1 , дугѣ круга CD съ центромъ въ O и прямой EF . Плоскости обѣихъ дугъ параллельны другъ другу.

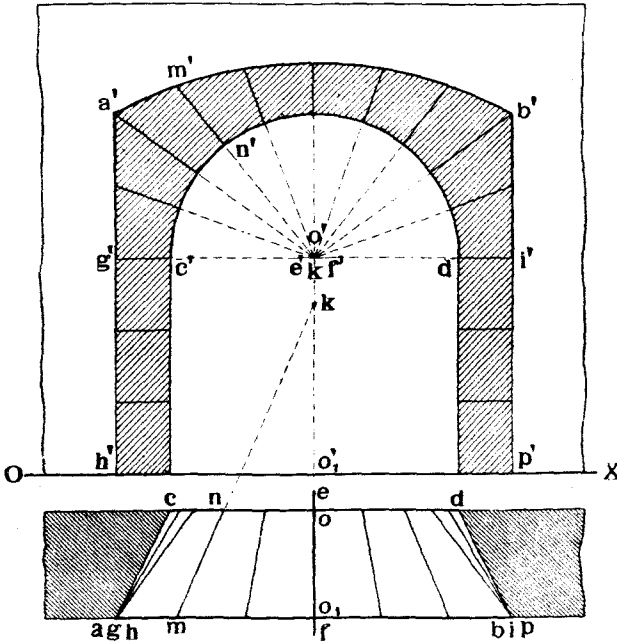
Часть свода ограничена двумя поверхностями, образованными движеніемъ прямой, пересѣкающей тѣ же двѣ направляющія CD и EF и прямыя AG или BI . Любая производящая MN строится такъ, какъ это было описано для свода по чертежу 305.

¹⁾ Примѣненіе такой поверхности къ очертанію сводовъ, перекрывающихъ косые проходы, т. е. такіе, ось которыхъ не лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ фасаднымъ стѣнамъ, было предложено Гашеттомъ (Hachette). Поверхность такихъ сводовъ называется «biais passé, corne de vache, warped arch». Подробности о свойствахъ этой поверхности см.:

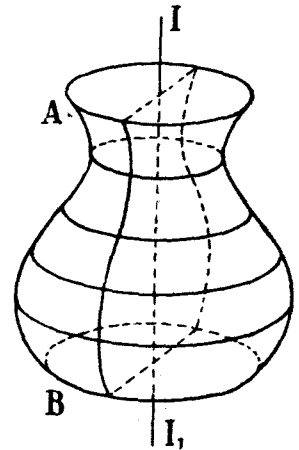
- 1) F. Wilson «Descriptive Geometry». New-York. 1898, pg. 127.
- 2) F. J. «Exercices de Géométrie Descriptive» Paris, 1893, pg. 425.
- 3) Adhémar «Coupe des pierres».
- 4) C. Wiener «Lehrbuch der Darstellenden Geometrie». Bd. II. St. 475.

і) *Поверхности вращения.*

Поверхности вращения образуются при вращении какой-нибудь криволинейной или прямолинейной производящей вокруг некоторой оси или при вращении кривой поверхности вокруг некоторой оси. В последнем случае поверхность вращения является оберткой всех положений производящей поверхности.



Черт. 307. Марсельский сводъ. (Косой цилиндръ о трехъ направляющихъ).



Черт. 308. Поверхность вращения.

На черт. 308 показана кувшинообразная поверхность, образованная вращением производящей AB вокруг оси II_1 .

Для задания такой поверхности в проекциях достаточно показать проекции оси вращения II_1 и направляющей AB (черт. 309).

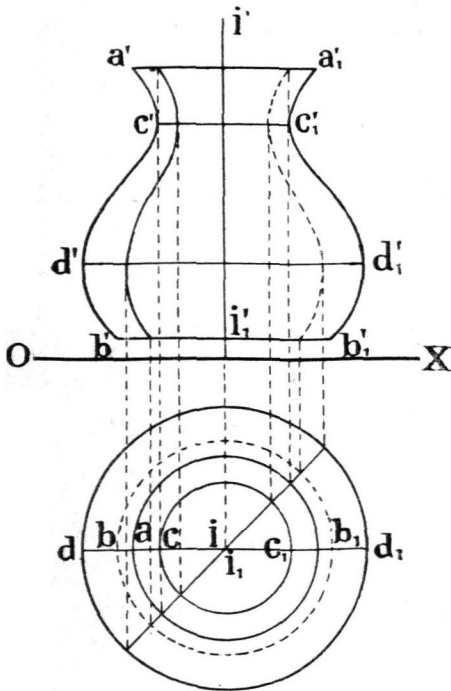
Для наглядности изображения поверхности вращения изображают часто проекциями контуров их видимости на V и H . В данном случае контуром видимости фигуры на V будут две симметричны относительно ii_1 линии $a'b'$ и $a_1'b_1'$ и две линии $a'a_1'$ и $b'b_1'$ параллельныя оси OX .

Контуром видимости на H будетъ кругъ dd_1 . Иногда, для наглядности, изображаютъ еще проекции круга наименьшаго диаметра cc_1 , *горла* поверхности, и круговъ оснований AA_1 и BB_1 .

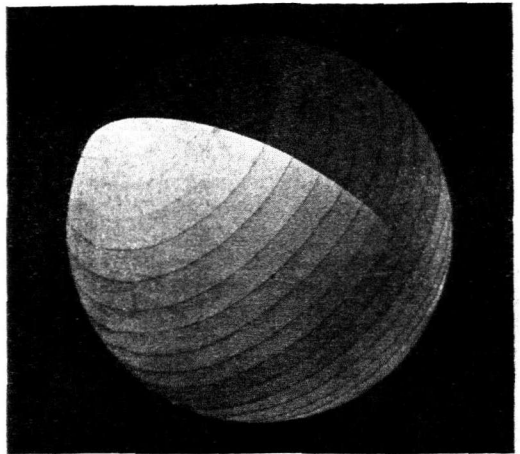
Проекціи любого положенія производящей легко построить, пользуясь методомъ вращенія, т. е. поворачивая рядъ точекъ данной производящей вокругъ оси II_1 на извѣстный уголъ и соединяя между собой новыя проекціи точекъ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ поверхностей вращенія.

Шаръ образуется вращеніемъ круга $ABDE$ вокругъ его діаметра II_1 (черт. 250). Контуромъ видимости шара на V и H служатъ круги того же діаметра, какъ и данный кругъ (черт. 249 и 250).



Черт. 309. Поверхность вращенія.



Черт. 310. Шаръ.

На черт. 310 показано изображеніе шара съ тѣнями.

Въ техникѣ часто примѣняются поверхности, образованныя вращеніемъ дуги BC круга съ касательной къ ней прямой AB , вокругъ діаметра II_1 этой дуги, параллельной упомянутой прямой AB (чертежъ 311).

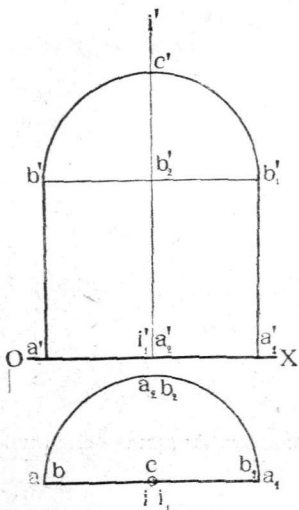
Такія поверхности удобны для образованія нишъ въ каменныхъ стѣнахъ (черт. 312).

Верхняя часть ниши ограничена четвертью поверхности шара, а остальная—поверхностью полуцилиндра.

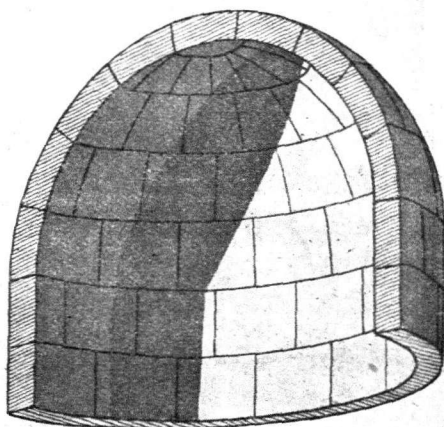
На черт. 313 показанъ примѣръ примѣненія такой поверхности къ образованію деревяннаго покрытія надъ храмомъ мормоновъ въ городѣ Большого Соляного Озера въ Америкѣ.

На черт. 314 показана такая же поверхность въ примѣненіи къ металлическому перекрытію концертнаго зала курзала въ томъ же городѣ.

Кольцо образуется вращением круга $ABCD$ (черт. 315) вокруг оси II_1 , лежащей в его плоскости и не пересекающей площади круга. Кольца иногда применяются для очертания цѣпей, какъ это и показано на черт. 315. На черт. 316 показано изображение кольца въ проекціи на V при разныхъ его поворотахъ относи-

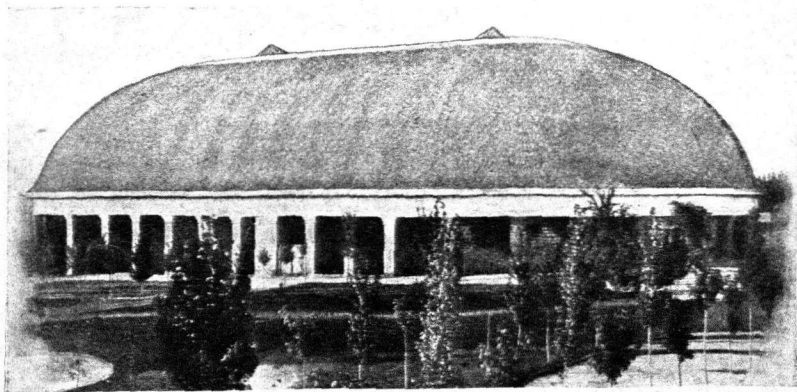


Черт. 311. Проекція ниши (Поверхность вращенія).



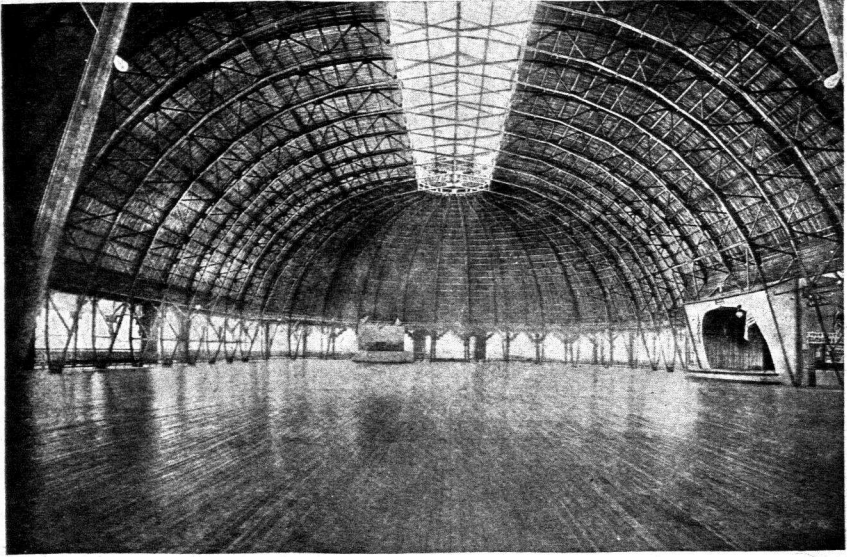
Черт. 312. Часть ниши (Поверхность вращенія).

тельно V . Если ось вращенія пересекаетъ кругъ, то поверхность вращенія называется *торомъ* (черт. 317).

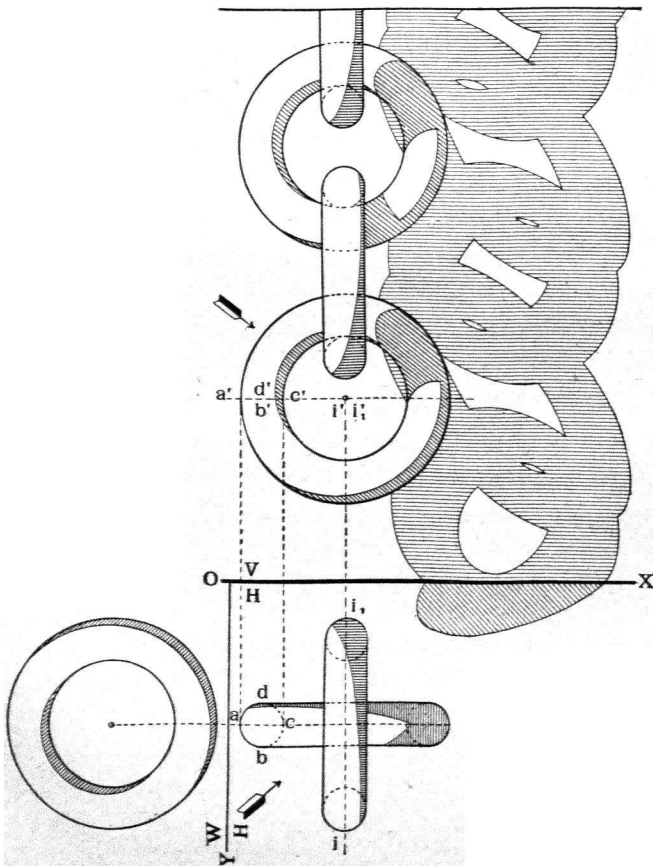


Черт. 313. Храмъ мормоновъ въ городѣ Большого Соляного Озера въ Америкѣ (Покрытіе образовано поверхностью вращенія).

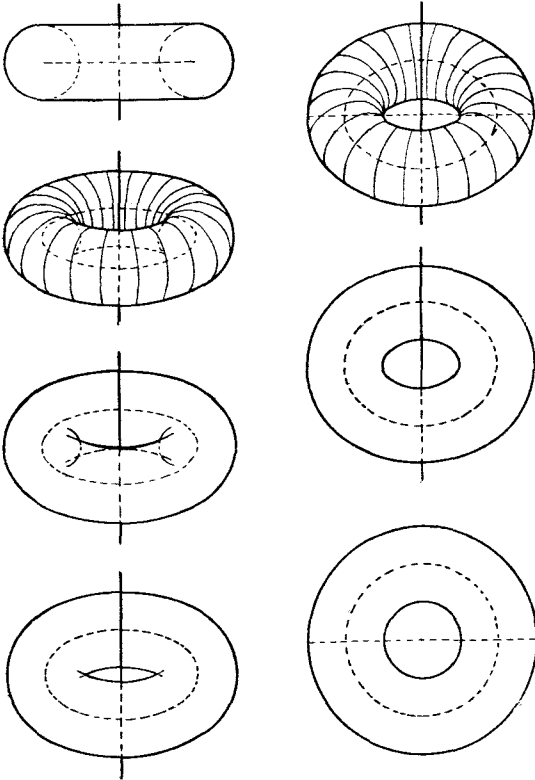
Эллипсоидомъ вращенія называется поверхность, образованная вращениемъ эллипса вокругъ одной изъ его осей (черт. 318, 319 и 320).



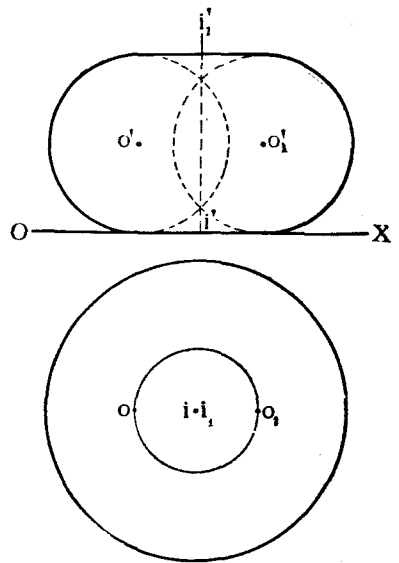
Черт. 314. Курзалъ на пляжѣ Большаго Солянаго Озера въ Америкѣ (Покрытіе образовано поверхностью вращенія).



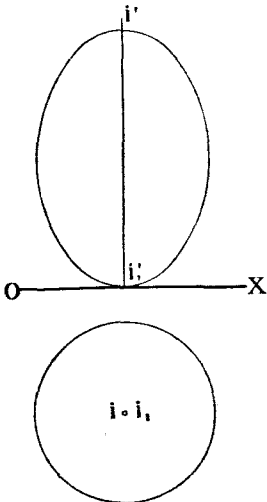
Черт. 315. Примѣненіе поверхностей вращенія (колець) къ образованію цѣпи



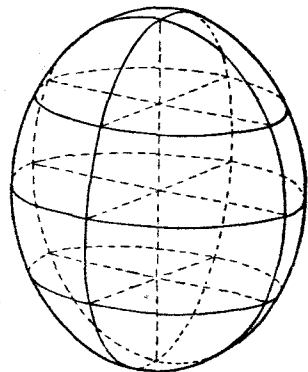
Черт. 316. Проекція кольца на Γ при разных его положеніяхъ относительно Γ .



Черт. 317. Торъ.

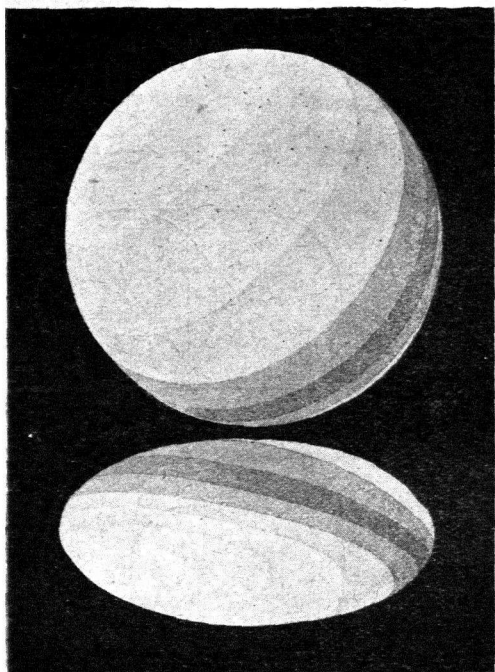


Черт. 318. Эллипсоидъ вращенія.

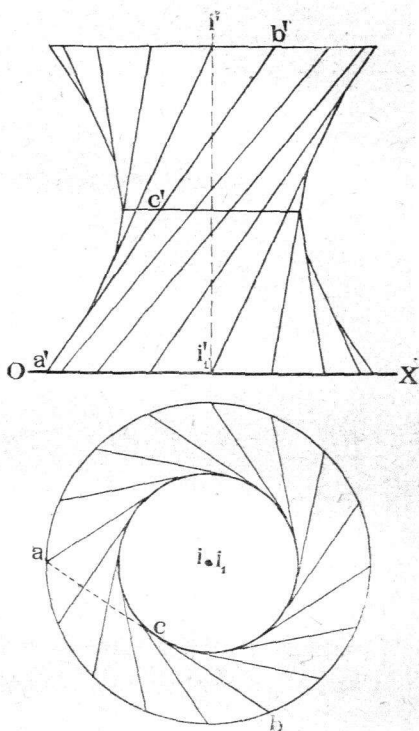


Черт. 319. Эллипсоидъ вращенія.

Гиперboloидъ вращенія образуется вращеніемъ прямой линіи AB

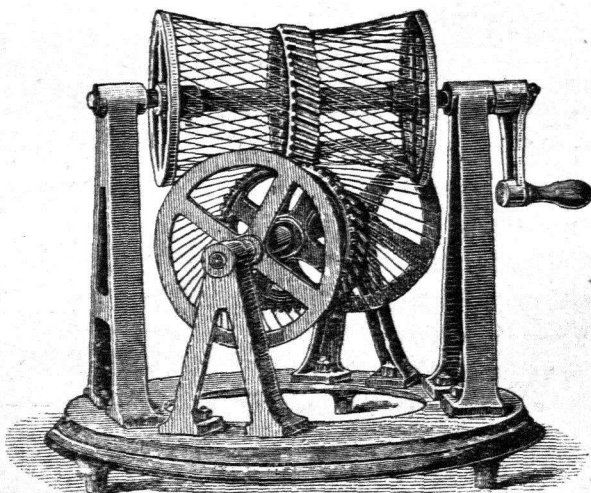


Черт. 320. Эллипсоидъ вращенія.



Черт. 321. Гиперboloидъ вращенія

вокругъ оси II_1 , не параллельной и не пересѣкающей AB (черт. 321).



Черт. 322. Примѣненіе гиперboloидовъ вращенія къ образованію зубчатыхъ колесъ.

При вращеніи AB точка C ея, ближайшая къ оси II_1 , опишетъ

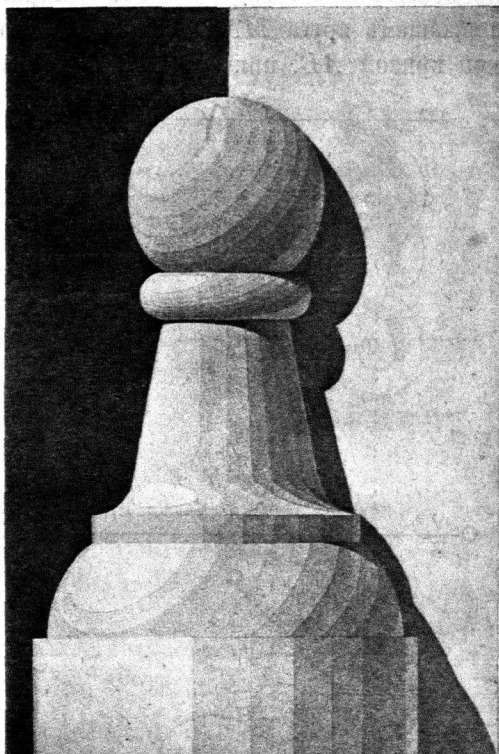
кругъ, который является геометрическимъ мѣстомъ точекъ, расположенныхъ на гиперboloидѣ и ближайшихъ къ оси II_1 .

Кругъ этотъ называется *горломъ* гиперboloида. Линія, обертывающая вертикальныя проекціи производящихъ гиперboloида, или контуръ видимости гиперboloида на V , является гиперболой.

Въ технику гиперboloидъ вращенія часто примѣняется для очертанія поверхности зубчатыхъ колесъ, модель которыхъ изображена на чертежѣ 322.

Очень часто, въ особенности въ архитектурѣ, примѣняются поверхности вращенія, образованныя изъ комбинацій дугъ круговъ, прямыхъ линій и т. д.

На черт. 323 показанъ примѣръ такого рода поверхности, изображающей каменную тумбу у угла дома.



Черт. 323. Сочетаніе различныхъ поверхностей вращеній.

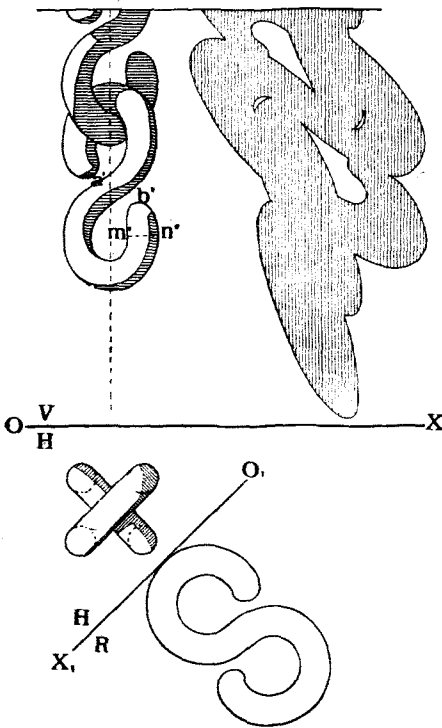
і) *Кривые цилиндры съ производящими постояннаго вида.*

Кривымъ цилиндромъ называется поверхность, образованная движеніемъ производящей кривой линіи или кривой поверхности по нѣкоторой криволинейной направляющей. Такъ какъ формы производящей и направляющей могутъ быть бесконечно разнообразными, то, очевидно, можно образовать бесконечно большое количество разнообразныхъ кривыхъ цилиндровъ.

Разсмотримъ способы заданія и изображенія нѣкоторыхъ кривыхъ цилиндровъ, которые находятъ себѣ примѣненіе въ технику, причемъ будемъ предполагать, что производящая кривая линія или поверхность не мѣняетъ своей формы.

Кривые цилиндры съ плоскими направляющими. Образуются они движеніемъ плоской кривой линіи, обыкновенно круга, центръ котораго скользитъ по плоской кривой линіи, причемъ поверхность круга все время остается нормальной къ направляющей кривой.

На черт. 324 показанъ примѣръ примѣненія такого кривого цилиндра къ образованію звеньевъ цѣпи. Поверхность каждого звена образована движеніемъ круга MN , центръ котораго скользитъ по плоской S —образной кривой AB , причемъ плоскость круга остается все время нормальной къ кривой AB . Для построения проекцій случайнаго положенія производящаго круга слѣдуетъ переимѣнить плоскость проекцій V , выбравъ новую вертикальную плоскость проекцій R параллельно плоскости направляющей линіи разсматриваемаго звена. На чертежѣ 324 такая плоскость R проведена параллельно осевой линіи верхняго звена ¹⁾.



Черт. 324. Кривые цилиндры съ плоскими направляющими въ примѣненіи къ образованію цѣпи.

образованію поверхностей фланцевыхъ трубъ, которыя изображены въ двухъ положеніяхъ относительно V и въ одномъ—относительно H . Поверхность этихъ трубъ образована движеніемъ круга, центръ котораго скользитъ по плоской направляющей, составленной изъ частей прямыхъ линій и дугъ круга.

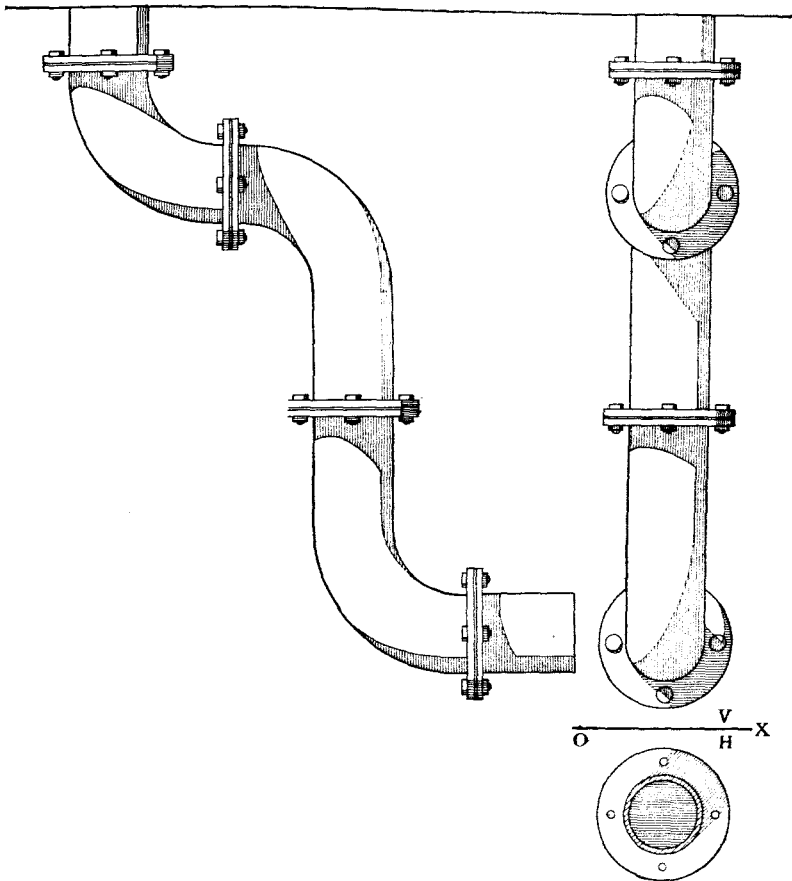
На чертежахъ 324 и 325 изображены простѣйшіе виды кривыхъ цилиндровъ, именно, части кольцевыхъ поверхностей (черт. 324) въ соединеніи съ прямыми круговыми цилиндрами (черт. 325).

На черт. 326 показанъ примѣръ примѣненія кривого цилиндра къ образованію бетоннаго свода.

На чертежѣ изображена четверть свода, перекрывающаго помѣщеніе, квадратное въ планѣ. Сводъ спроектированъ на плоскости V и W .

¹⁾ Плоскость H замѣнена ей параллельной и касательной къ верхнему звену ввиду его.

Производящая MN , четверть дуги круга, движется такъ, что конецъ ея M скользитъ по направляющей MA —дугѣ круга, причемъ плоскость производящей все время остается вертикальной и параллельной V , а радиусъ MO остается горизонтальнымъ.



Черт. 325. Кривые цилиндры съ плоскими направляющими въ примѣненіи къ образованію фланцевыхъ трубъ.

Гелисоидальный цилиндръ постояннаго плоскаго горизонтальнаго сѣченія образуется движеніемъ плоской кривой линіи, обыкновенно симметричной относительно своего центра, который скользитъ по цилиндрической винтовой линіи съ вертикальной осью; плоскость же кривой остается все время горизонтальной.

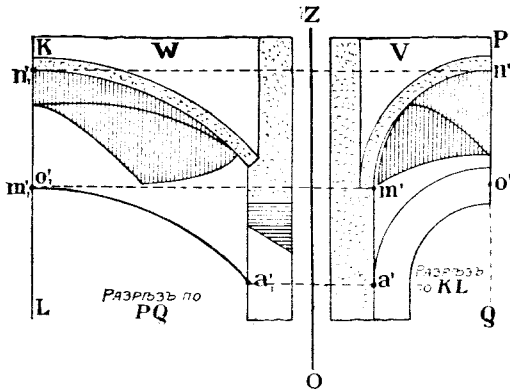
На черт. 327 показанъ примѣръ проекціи такой поверхности. Производящая ея — кругъ, центръ котораго движется по винтовой линіи 1, 2...7, 8, 1, 2₁...5₁.

Такого рода кривые цилиндры примѣняются для очертанія колюая.

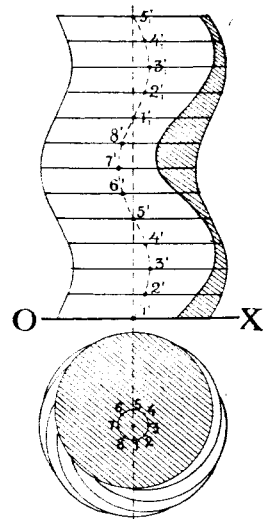
Напримѣръ, на черт. 328 показано изображеніе такихъ четырехъ колоннъ, поддерживающихъ балдахинъ надъ гробницей Св. Петра въ храмѣ Св. Петра въ Римѣ.

На чертежѣ 329 изображены проекціи еще одной колонны образованной винтообразнымъ движеніемъ заштрихованной фигуры, центръ которой скользитъ вдоль оси колонны.

Гелисоидальный цилиндръ постояннаго плоскаго меридіональнаго сѣченія образуется движеніемъ плоской кривой, одна изъ точекъ которой, чаще всего центръ, если кривая имѣетъ таковой, скользитъ по направляющей цилиндрической винтовой линіи, а плоскость производящей кривой постоянно проходитъ черезъ ось винтовой линіи.



Черт. 326. Примѣненіе кривого цилиндра къ образованію бетоннаго свода.



Черт. 327. Гелисоидальный цилиндръ постояннаго горизонтальнаго сѣченія.

На черт. 330 показано примѣненіе такой поверхности къ очертанію консольнаго желѣзо-бетоннаго свода подъ винтовой лѣстницей.

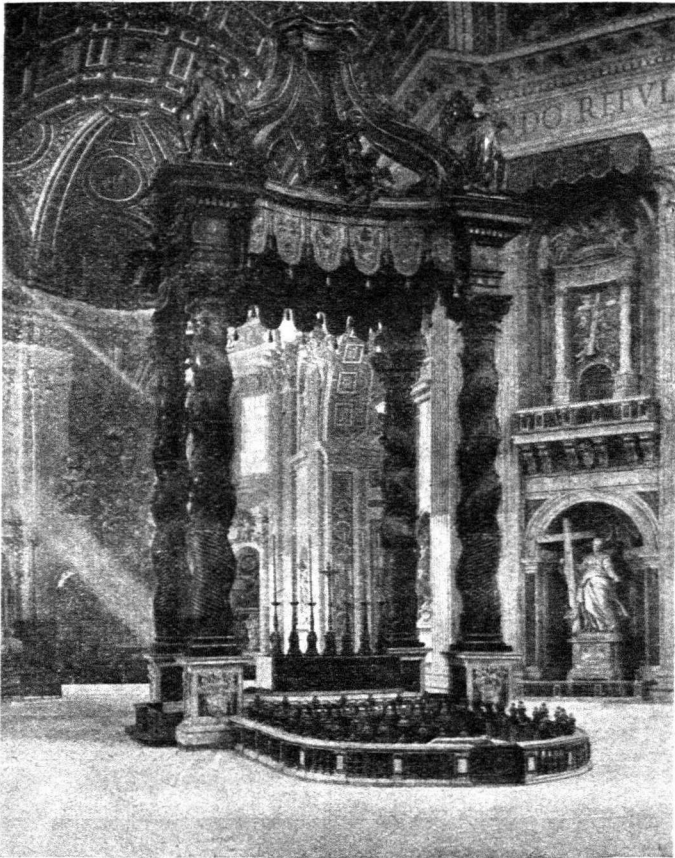
Дуга *MN*, равная четверти окружности, винтообразно движется вокругъ вертикальной оси *II₁* лѣстницы, причемъ плоскость дуги постоянно проходитъ черезъ ось *II*, а концы дуги описываютъ одноосныя винтовыя линіи одинаковаго шага.

На черт. 331 показана одна вертикальная проекція этой лѣстницы съ тѣнями.

На черт. 332 показанъ еще примѣръ примѣненія подобнаго цилиндра къ очертанію перилъ винтовой лѣстницы.

Гелисоидальные цилиндры круглаго нормальнаго сѣченія образуются движеніемъ круга, центръ котораго скользитъ по цилиндрической винтовой линіи, а плоскость круга остается все время нормальна къ винтовой. Эта же поверхность можетъ быть образована движеніемъ шара, того же

радіуса, какъ и упомянутый кругъ, причемъ центръ шара движется по той же винтовой линіи. Контурами видимости этой поверхности на V и H служатъ обертки круговъ проекцій шара на V и H (черт. 333).



Черт. 328. Главный алтарь съ балдахинѣмъ въ храмѣ Св. Петра въ Римѣ. Призмѣненіе гелисоидальныхъ цилиндровъ постояннаго плоскаго горизонтальнаго сѣченія.

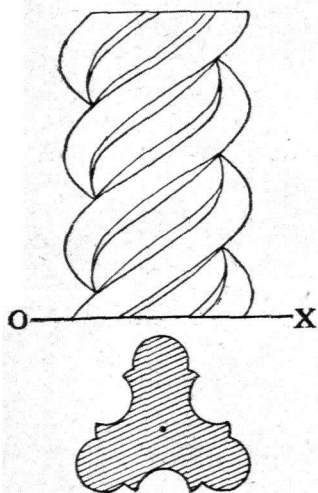
На черт. 334 показаны проекціи такого цилиндра съ тѣнями.

к) *Поверхности съ кривыми производящими переменнаго вида.*

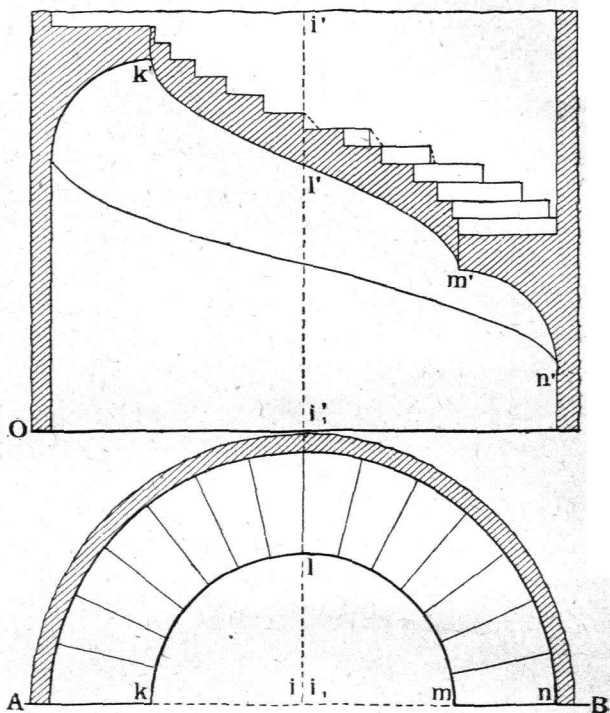
Такого рода поверхности образуются движеніемъ производящихъ: кривой линіи или кривой поверхности по нѣкоторой направляющей, причемъ видъ производящей при ея движеніи измѣняется по извѣстному закону.

Разсмотримъ нѣсколько такихъ поверхностей:

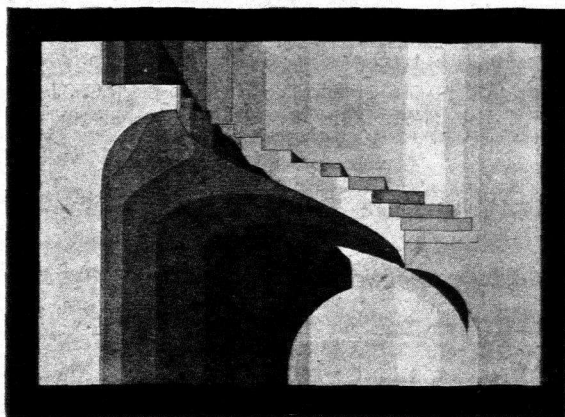
Трехъосный эллипсоидъ образуется движениемъ эллипса при слѣдующихъ условіяхъ (черт. 335):



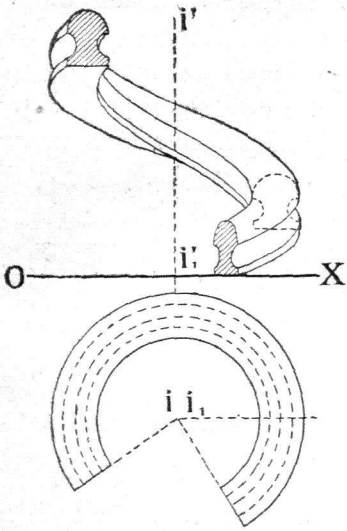
Черт. 329. Колонна, поверхность которой образована винтообразнымъ движениемъ заштрихованной фигуры.



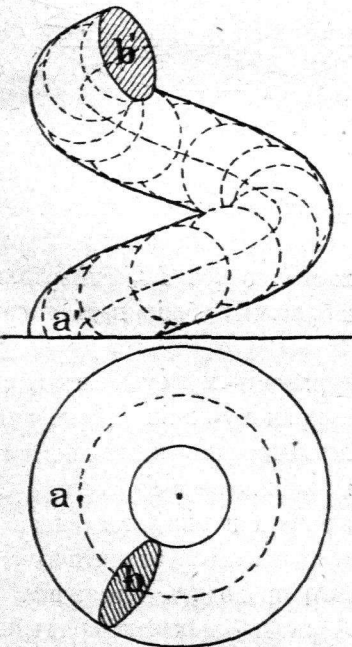
Черт. 330. Консольная поверхность подъ желѣзобетонной винтовой лѣстницей. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра постояннаго плоскаго меридіональнаго сѣченія.



Черт. 331. Консольная поверхность подъ желѣзобетонною лѣстницей. Примѣненіе гелисоидальнаго цилиндра.

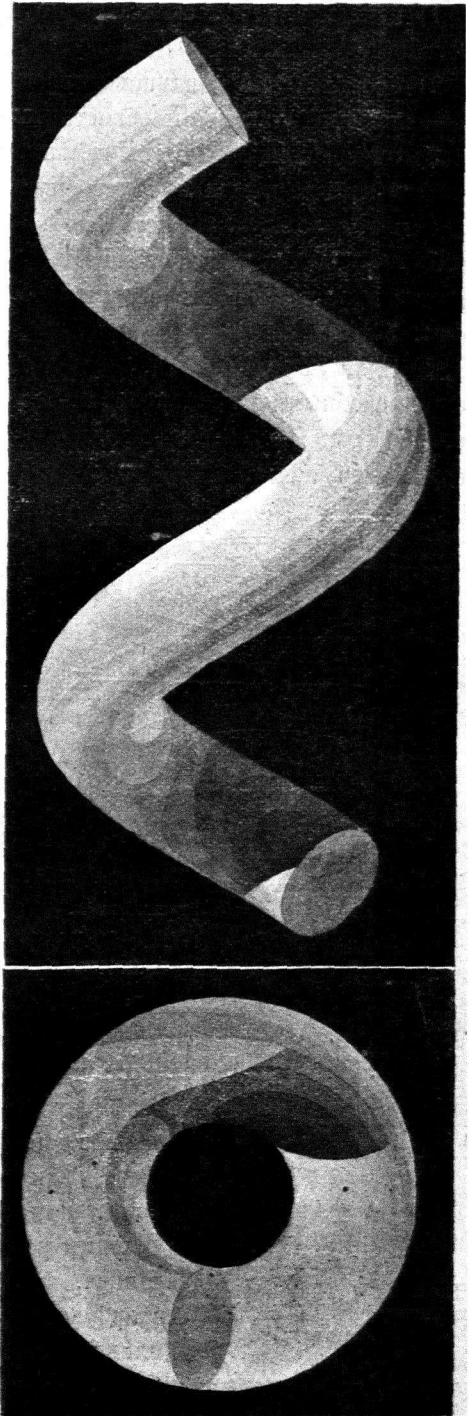


Черт. 332. Перила винтовой лестницы. Примыкание гелисоидального цилиндра.



Черт. 333. Гелисоидальный цилиндр круглого нормального сечения.

Н. Рыжовъ.



Черт. 334. Гелисоидальный цилиндр круглого нормального сечения.

14*

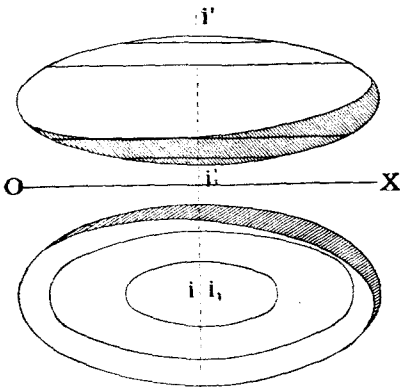
1) центр эллипса скользитъ по оси II_1 , перпендикулярной къ его плоскости.

2) производящій эллипсъ пересѣкаетъ въ двухъ точкахъ другой направляющій эллипсъ, плоскость котораго проходитъ черезъ ось II_1 .

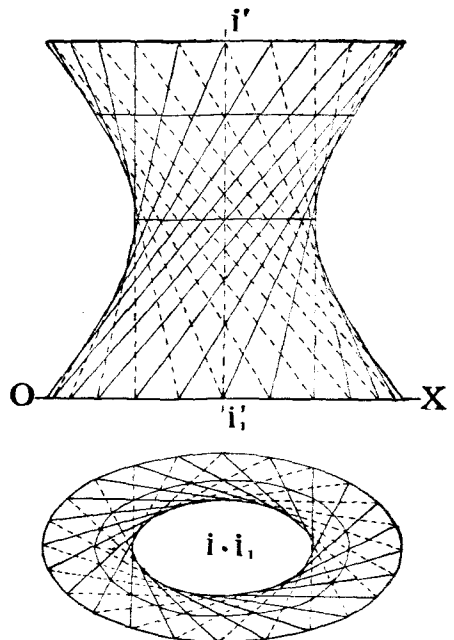
3) производящій эллипсъ измѣняетъ свои размѣры, оставаясь всегда подобнымъ и параллельнымъ своему начальному положенію.

Однополый эллиптический гиперболоидъ образуется движеніемъ эллипса при слѣдующихъ условіяхъ (черт. 336).

1) Эллипсъ остается параллельнымъ, подобнымъ и одинаково расположеннымъ со своимъ начальнымъ положеніемъ.



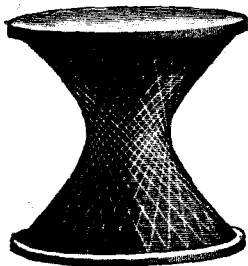
Черт. 335. Трехосный эллипсоидъ.



Черт. 336. Однополый эллиптический гиперболоидъ.

2) Эллипсъ постоянно пересѣкаетъ гиперболу, плоскость которой перпендикулярна къ плоскости эллипса. При этомъ центр эллипса движется по оси II_1 гиперболы.

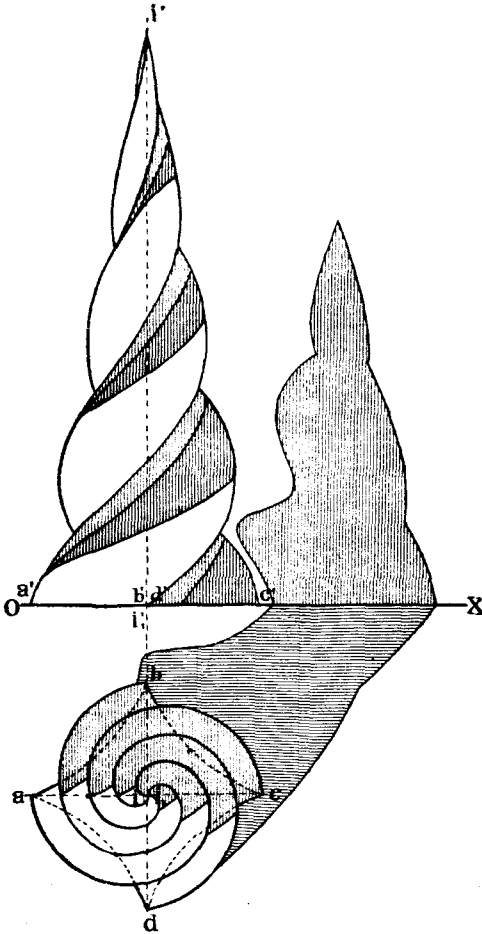
На черт. 337 изображенъ общій видъ такого гиперболоида.



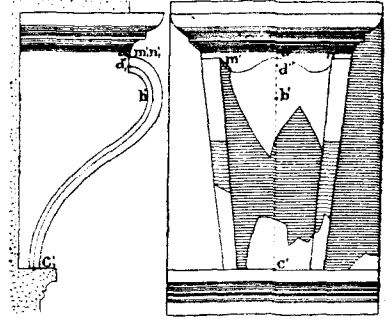
Черт. 337. Однополый эллиптический гиперболоидъ.

Та же самая поверхность можетъ быть образована движеніемъ прямой линіи переменнѣй длины, при чемъ движеніе это подчинено слѣдующимъ условіямъ: линія должна пересѣкать два эллипса, контуры верхняго и нижняго основанія гиперболоида, и должна касаться эллиптического цилиндра, ось котораго проходитъ черезъ центры упомянутыхъ двухъ эллипсовъ. На черт. 336 и 337 показанъ рядъ положеній такой прямолинейной производящей.

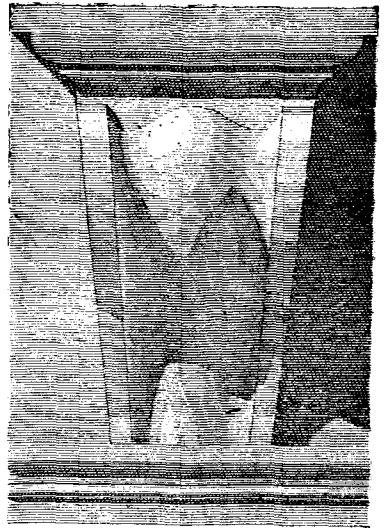
На черт. 338 изображена кривая поверхность, образованная винтообразным движением квадрата $ABCD$ с вогнутыми сторонами, центр которого скользит по оси II , перпендикулярной к плоскости квадрата. Квадрат остается все время подобным самому себѣ, а стороны



Черт. 338. Поверхность съ кривою производящею перемѣннаго вида.



Черт. 339. Примѣненіе кривой поверхности съ производящей перемѣннаго вида къ образованію кровштейна.



Черт. 340. Примѣненіе кривой поверхности съ производящей перемѣннаго вида къ образованію кровштейна.

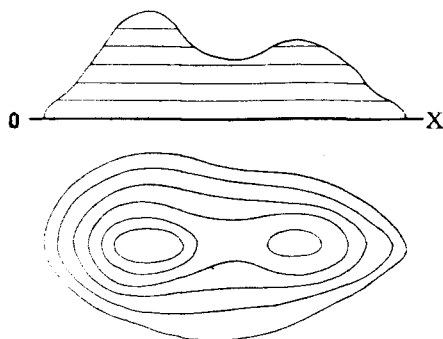
его уменьшаются пропорціонально его поступательному и вращательному движеніямъ.

На черт. 339 и 340 изображенъ кровштейнъ, какъ примѣръ кривой поверхности съ производящими перемѣннаго вида. Направляющей слу-

жить плоская кривая DBC . Производящей является плоская волнистая кривая MAN , плоскость которой остается во все время движенья нормальной къ направляющей и которая измѣняется, оставаясь подобной начальному своему положенію. Концы производящей упираются въ боковыя стѣнки кронштейна.

1) *Графическія поверхности.*

Если образованіе поверхности не подчинено никакому геометрическому закону и является совершенно случайнымъ, то такая поверхность назы-



Черт. 341. Топографическая поверхность.

вается графической и изображается она графически при помощи ряда лежащихъ въ ней линій. Въ качествѣ такихъ линій чаще всего берутъ *горизонтали поверхности*, т. е. линіи сѣченія поверхности съ горизонтальными плоскостями.

Такой способъ изображенія горизонталями примѣняется чаще всего къ изображенію топографіи или рельефа земной поверхности, почему и самыя поверхности часто называютъ *топографическими*.

На черт. 341 изображена такая поверхность при помощи ея горизонталей и контура видимости ¹⁾.

§ 19. Пересѣченіе кривыхъ поверхностей.

Рѣшеніе задачи на пересѣченіе кривыхъ поверхностей между собою сходно съ таковою же задачей на пересѣченіе многогранниковъ. Дѣйствительно, увеличивая число реберъ и граней многогранника и уменьшая въ то же время площадь каждой грани, можно въ предѣлѣ отъ многогранника перейти къ соотвѣтственной кривой поверхности, производящія которой замѣняютъ ребра многогранника. Напримѣръ, цилиндръ можно разсматривать, какъ предѣлъ измѣненія призмы; конусъ—какъ предѣлъ измѣненія пирамиды, шаръ—какъ предѣлъ измѣненія правильного многогранника и т. д.

Ниже мы рѣшаемъ въ опредѣленной послѣдовательности пять основныхъ задачъ. Рѣшеніе каждой изъ нихъ основано на рѣшеніи предыдущей.

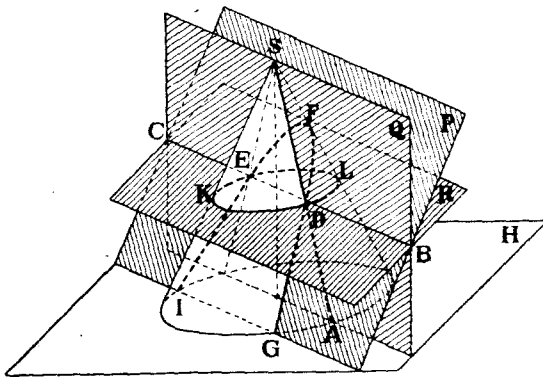
Задачи эти слѣдующія:

¹⁾ Относительно общаго случая образованія кривыхъ поверхностей см. В. Курдюмовъ. „Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей“ и М. Ребиндеръ „О касаніи двухъ поверхностей по нѣкоторой кривой линіи“ (Задача профессора Курдюмова).

- а) Пересѣченіе кривой поверхности съ плоскостью.
 б) » » » » прямой линіей.
 с) » » » » многогранникомъ.
 д) » » » » кривою поверхностью.
 е) » » » » кривою линіей.

а) *Пересѣченіе кривой поверхности съ плоскостью.*

Громадное большинство примѣняемыхъ въ техникахъ поверхностей имѣютъ плоскія кривыя или прямолинейныя производящія. Поэтому рассмотримъ здѣсь общій пріемъ рѣшенія поставленной задачи въ пространствѣ именно для такихъ поверхностей. Если же поверхность образована движеніемъ кривой линіи двойкой кривизны, то для опредѣленія линіи сѣченія такой поверхности съ плоскостью можно руководствоваться правилами, изложенными въ пунктѣ (е) настоящаго параграфа.



Черт. 342.

Пусть дана поверхность съ прямолинейными производящими, напри-
 мѣръ, прямой круговой конусъ (черт. 342), и требуется построить ли-
 нію сѣченія ея съ плоскостью *P*.

Для опредѣленія искомой линіи слѣдуетъ послѣдовательно брать рядъ
 производящихъ конуса и находить точки пересѣченія ихъ съ плоскостью *P*.
 Соединяя полученныя точки и получимъ искомую линію сѣченія
GDFEI.

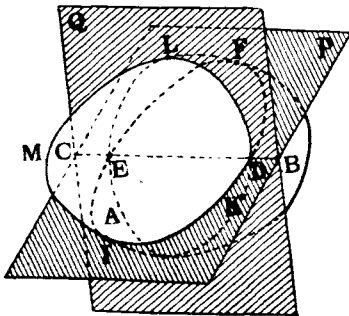
На черт. 342 показаны построения, которыя выполняются въ про-
 странствѣ, чтобы найти точку *D* пересѣченія одной изъ производящихъ
SA конуса съ плоскостью *P*.

Черезъ *SA* и черезъ ось конуса проведена плоскость *Q* и найдена

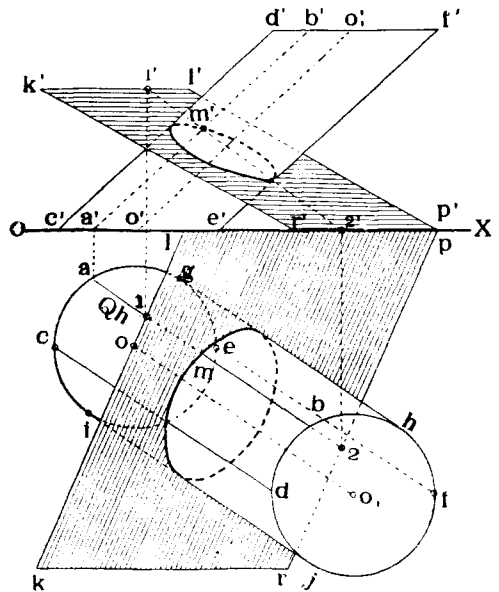
линія BC сѣченія плоскостей P и Q . Искомая точка D опредѣляется, какъ точка пересѣченія линій SA и BC .

Ту же точку B можно было бы найти и иначе, разсѣкая конусъ плоскостью R , нормальной къ его оси. Эта плоскость разсѣчетъ конусъ по кругу, а плоскость P по прямой BC . Пересѣченіе этого круга съ BC и дасть точки, принадлежащія искомоѣ линіи сѣченія.

Если дана поверхность не линейчатая, а съ плоскими кривыми производящими (черт. 343), то приемъ рѣшенія задачи въ пространствѣ остается тѣмъ же самымъ. Искомая кривая строится по точкамъ. Для опредѣленія любой точки заключаемъ случайную кривую производящую ALK въ плоскость Q , находимъ линію BC сѣченія плоскостей



Черт. 343.



Черт. 344.

Q и P и замѣчаемъ точки B и E пересѣченія производящей ALK съ BC . Эти точки и будутъ принадлежать искомоѣ линіи $IEFD$ сѣченія поверхности M съ плоскостью P .

Переходимъ теперь къ рѣшенію подобныхъ задачъ въ проекціяхъ.

На черт. 344 даны проекціи цилиндра круглаго горизонтальнаго сѣченія и плоскости KLP ; требуется построить линію сѣченія плоскости съ цилиндромъ.

Выберемъ случайную производящую AB цилиндра и найдемъ обычнымъ способомъ точку M пересѣченія ея съ данной плоскостью. (Вспомогательная плоскость Q и линія 1, 2).

Взявъ рядъ производящихъ цилиндра, можно найти рядъ точекъ пересѣченія ихъ съ данной плоскостью. Соединяя полученныя точки, получимъ искомую линію сѣченія. Изъ числа производящихъ цилиндра слѣ-

Найдемъ высшую и низшую точки искомой линии. Для этого проведемъ черезъ центръ шара плоскость S перпендикулярную къ H и къ $ABCD$ ($Sh \perp ad$). Кругъ сѣченія шара съ S и пересѣчетъ $ABCD$ въ искомыхъ точкахъ. Для нахождения ихъ перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, выбравъ $R \perp ABCD$ и $\perp H$. Тогда на R кругъ сѣченія шара съ S спроектируется въ кругъ же, а плоскость $ABCD$ —въ прямую. Точки G и S пересѣченія этой прямой съ кругомъ и опредѣляютъ наивысшую и наинизшую точки искомой кривой линии. Остается лишь перенести эти точки въ систему $\frac{V}{H}$.

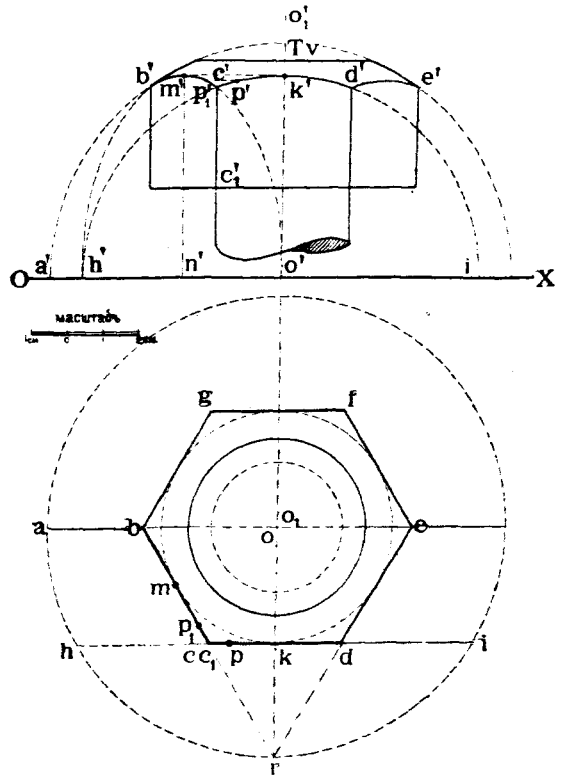
Опредѣлимъ теперь случайныя точки кривой сѣченія. Для этого проведемъ плоскость T параллельно H .

Эта плоскость пересѣчетъ шаръ по кругу радіуса $5_1'6_1'$, а плоскость $ABCD$ по прямой **89**.

Пересѣченіе такого круга съ прямой **89** и опредѣлитъ точки U и T , принадлежащія искомой линии сѣченія.

Продолжая построение подобнымъ образомъ, можно опредѣлить еще рядъ точекъ искомой кривой и затѣмъ соединить ихъ по лекалу.

Такъ какъ въ пространствѣ линіей сѣченія шара съ плоскостью является кругъ, то проекціями этого круга будутъ эллипсы. Поэтому, при построеніи этихъ эллипсовъ, можно найти по нѣсколькимъ точкамъ оси эллипсовъ, а затѣмъ строить ихъ остальные точки, пользуясь приемами указываемыми въ черченіи.



Черт. 347.

Задача № 24.

Построить проекціи головки болта, образованной слѣдующимъ образомъ (черт. 347).

Боковая поверхность головки ограничена правильной шестигранной призмой, описанной вокругъ цилиндра, діаметра 6,5 сант.

Верхняя поверхность головки ограничена шаровой поверхностью диаметра 13 сант. и срезана горизонтальной плоскостью въ разстояніи 0,5 сантиметра отъ верхней точки очертанія боковой грани.

Высота головки— $3\frac{1}{2}$ сант. Диаметръ болта— $3\frac{3}{4}$ сант.

Рѣшеніе.

Строимъ въ планѣ правильный шестиугольникъ $bcdefg$, описанный вокругъ круга радиуса (въ соответственномъ масштабѣ) 6,5 сант. Этотъ шестиугольникъ будетъ служить горизонтальной проекціей боковыхъ граней головки болта. Далѣе строимъ проекція полшара диаметромъ 13 сант. съ центромъ въ точкѣ O , лежащей на оси призмы боковыхъ граней болта. Находимъ линіи сѣченія послѣднихъ съ поверхностью шара.

Въ пространствѣ таковыми линіями являются дуги круговъ.

Линія сѣченія грани CD съ этимъ шаромъ спроектируется на V въ видѣ дуги круга радиуса

$$hk = ki = h'o'.$$

Линія сѣченія грани BC съ шаромъ спроектируется на V въ видѣ дуги эллипса, большая полуось $m'm'$ котораго равняется отрезку $k'o' = hk$, а меньшая ось $h'o'$ котораго равна hk .

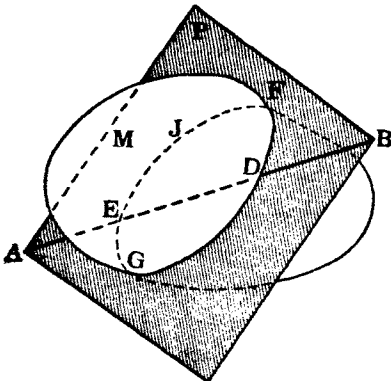
Фигуру дуги $b'p'$ этого эллипса можно разсматривать, какъ проекцію дуги CKD круга, повернутаго вокругъ оси CC_1 такъ, чтобы плоскость CD совпала съ гранью BC . На чертежѣ показаны построенія для опредѣленія проекцій точки P въ повернутомъ ея положеніи P_1 .

Далѣе проводимъ плоскость T въ разстояніи отъ точки K , равномъ 0,5 сант., и находимъ кругъ сѣченія T съ шаромъ, служащій верхнимъ ограниченіемъ головки болта.

Остается найти теперь лишь нижнюю грань головки въ разстояніи 3,5 сант. отъ грани T и построить проекція стержня болта ($D = 3\frac{3}{4}$ сант.), что уже не представляетъ затрудненій.

b). Пересѣченіе кривой поверхности съ прямою линіей.

Рѣшеніе этой задачи основано на рѣшеніи задачи, только что разсмотрѣнной въ пунктѣ (а) этого параграфа.



Черт. 348.

Общій приемъ рѣшенія задачи на опредѣленіе точки пересѣченія прямой линіи AB съ любой кривой поверхностью M (черт. 348) заключается въ слѣдующемъ.

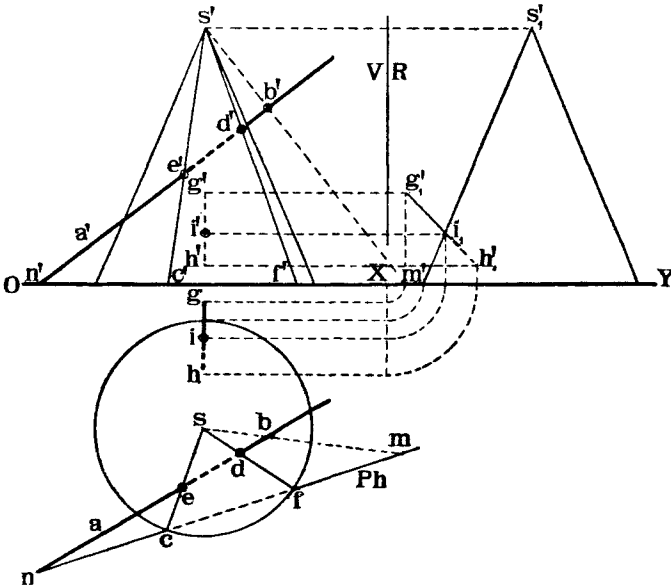
Проводимъ черезъ AB случайную плоскость P , находимъ линію FGJ сѣченія P съ M и замѣчаемъ точки B и E пересѣченія AB съ FGJ . Точки D и E и будутъ искомыми.

Въ частности плоскость P , проходящую черезъ AB , слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы она пересѣкала поверхность M по возможно простымъ линіямъ—прямой и кругу.

Прослѣдимъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ подобнаго рода.

Найти точки пересѣченія прямой AB съ конусомъ (черт. 349).

Проводимъ черезъ прямую AB плоскость P такъ, чтобы она проходила черезъ вершину S конуса. Для опредѣленія такой плоскости двумя линиями, достаточно соединить точку S хотя бы съ точкой B прямой AB . Плоскость SBA пересѣчетъ конусъ по производящимъ послѣдняго. Построимъ эти производящія. Для этого находимъ слѣдъ Ph плоскости SBA и замѣчаемъ точки C и F пересѣченія слѣдовъ плоскости P и конуса.



Черт. 349.

Линіи SC и SE и будутъ производящими, по которымъ плоскость P пересѣкаетъ конусъ. Замѣчаемъ теперь точки D и E пересѣченія данной прямой AB съ найденными производящими. Точки D и E и будутъ искомыми.

Если данная линія, напримѣръ, GH лежитъ въ одной профильной плоскости съ вершиной S конуса, то для опредѣленія точки пересѣченія прямой съ конусомъ удобно примѣнить методъ перемѣны плоскостей проекцій.

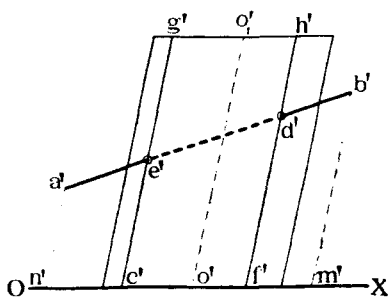
Перейдемъ напримѣръ, отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$, гдѣ V профильная плоскость. Спроектируемъ на V конусъ и прямую GH а найдемъ точку i_1' пересѣченія $g_1'h_1'$ съ контуромъ проевкціи конуса. Точка I будетъ искомой. Остается ее лишь перенести въ систему $\frac{V}{H}$ ¹⁾.

¹⁾ Рѣшеніе задачи въ случаѣ, если вершина конуса лежать внѣ предѣловъ чертежа, см. Н. Рынинъ «Ледорѣзы», стр. 76 и его же статью въ извѣстіяхъ СПб Политехнич. Инст. 1905 г. Т. III.

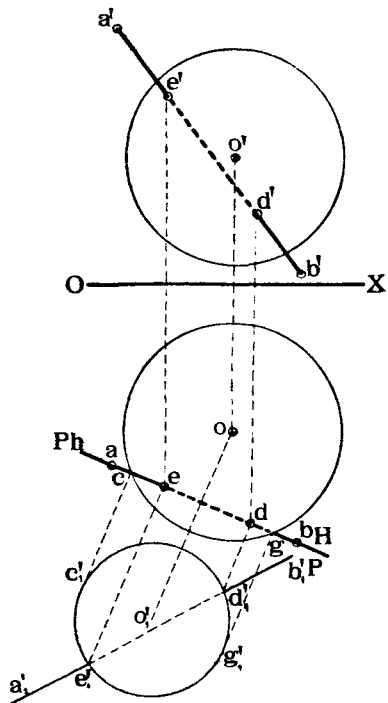
Найти точки пересѣченія прямой AB съ цилиндромъ круглаго горизонтальнаго сѣченія (черт. 350).

Для рѣшенія этой задачи проводимъ черезъ AB плоскость P параллельную оси OO , цилиндра, находимъ слѣдъ Ph этой плоскости и замѣчаемъ точки C и F пересѣченія слѣда Ph со слѣдомъ цилиндра.

Приводимъ черезъ точки C и F производящія цилиндра CG и FB и замѣчаемъ пересѣченіе послѣднихъ съ данною прямою AB въ точкахъ E и D , которыя и будутъ искомыми.



Черт. 350.



Черт. 351.

На черт. 351 рѣшена задача: Построить точки пересѣченія прямой AB съ шаромъ.

Прямая AB заключена въ плоскость P , перпендикулярную къ H . Плоскость P пересѣкаетъ шаръ по кругу. Чтобы спроектировать послѣдній безъ искаженія, переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{P}{H}$.

Строимъ въ новой системѣ проекціи круга и прямой и замѣчаемъ точки e_1' и g_1' ихъ пересѣченія. Переходимъ теперь обратно къ системѣ $\frac{V}{H}$ и находимъ окончательно въ ней проекціи искомыхъ точекъ D и E .

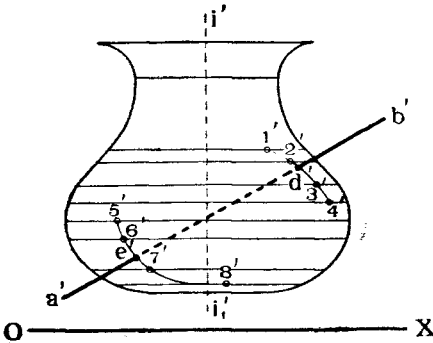
На черт. 352 показано рѣшеніе еще одной задачи: Найти точки пересѣченія прямой AB съ поверхностью, образованной вращеніемъ

кривой случайнаго вида вокругъ оси II_1 . Заключаемъ AB въ плоскости P , перпендикулярную къ H и строимъ линію сѣченія P съ поверхностью вращенія. Для этого проводимъ на послѣдней рядъ круговъ на разныхъ высотахъ, приблизительно около предполагаемыхъ мѣстъ, гдѣ могутъ быть искомыя точки.

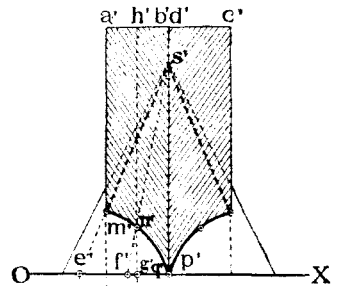
Далѣе находимъ точки 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8 пересѣченія проведенныхъ круговъ съ плоскостью P ; кривыя 1234 и 5678 будутъ служить линіями сѣченія плоскости P съ поверхностью вращенія. Замѣчаемъ теперь точки D и E пересѣченія данной прямой AB съ построенными кривыми. Точки D и E будутъ искомыми.

с) *Пересѣченіе кривой поверхности съ многогранникомъ.*

Такъ какъ многогранникъ заключаетъ въ себѣ рядъ прямыхъ линій—реберъ, и рядъ плоскостей—граней, то задача на пересѣченіе его поверхности съ любую кривой поверхности сводится къ задачамъ на пересѣченіе кривой поверхности съ прямою линіей или съ плоскостью.



Черт. 352.



Черт. 353.

На черт. 353 показанъ примѣръ рѣшенія подобной задачи:

Данъ прямой круговой конусъ и прямая призма квадратнаго сѣченія. Одно изъ реберъ призмы совпадаетъ съ осью конуса. Требуется поставить линіи сѣченія конуса и призмы.

Грань ADQ призмы пересѣкаетъ конусъ по производящей SE послѣдняго. Точка M пересѣченія ребра AM призмы съ производящей SE будетъ служить точкой пересѣченія ребра AM съ поверхностью конуса. Далѣе, ребро BP призмы пересѣкается съ кругомъ основанія конуса въ точкѣ P .

Линія сѣченія грани ABP призмы съ конусомъ пройдетъ черезъ точки M и P . Для построенія случайной точки кривой MP проведемъ какую нибудь производящую SF конуса и находимъ точку N пересѣченія ея съ гранью ABP . Точка N будетъ принадлежать кривой MP . Продолжая подобныя построенія, можно найти рядъ точекъ кривой MP , которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить между собой плавной кривой. Остальныя линіи сѣченія будутъ симметричны съ найденными.

д) Пересѣченіе кривыхъ поверхностей другъ съ другомъ.

Общіе способы рѣшенія задачъ въ пространствѣ на построеніе линій сѣченія кривыхъ поверхностей другъ съ другомъ заключаются въ слѣдующемъ:

Искомая кривая линіи строятся по точкамъ, которыя можно опредѣлить слѣдующимъ способомъ:

1-й способъ. Если хотя бы одна изъ поверхностей имѣетъ прямолинейныя производящія, то находимъ послѣдовательно точки пересѣченія таковыхъ съ другой поверхностью такъ, какъ это было указано въ пунктѣ *b* этого параграфа (стр. 218). Соединяя полученные точки, получимъ искомую кривую.

2-й способъ. Обѣ данныя поверхности пересѣкаемъ рядомъ вспомогательныхъ плоскостей и находимъ линіи сѣченія каждой такой плоскости съ обѣими данными поверхностями. Точки пересѣченія между собой каждой пары найденныхъ линій будутъ, очевидно, принадлежать искомой линіи сѣченія.

Соединяя эти точки плавной кривой, получимъ искомую кривую линію.

3-й способъ. Обѣ данныя поверхности пересѣкаемъ рядомъ вспомогательныхъ кривыхъ поверхностей, но притомъ такихъ, что линіями сѣченія ихъ съ данными двумя являются, по возможности, простыми для построенія, напримѣръ, прямыми линіями или кругами.

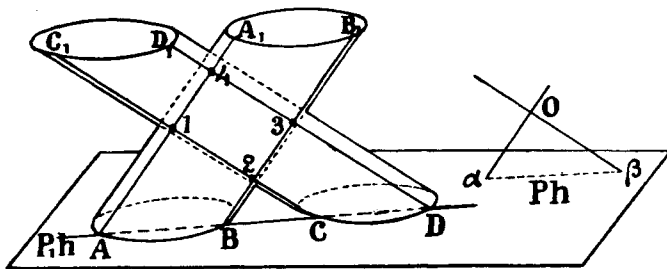
Очевидно, что если соединить между собою рядъ точекъ пересѣченія соответственныхъ найденныхъ линій, то и получится искомая кривая линія сѣченія данныхъ поверхностей.

Разсмотримъ примѣненіе этихъ способовъ на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Построеніе линіи сѣченія двухъ цилиндровъ.

Примѣнимъ для рѣшенія этой задачи 2-й способъ (черт. 354).

Чтобы построить точки искомой линии сѣченія дѣлаемъ въ простран-



Черт. 354.

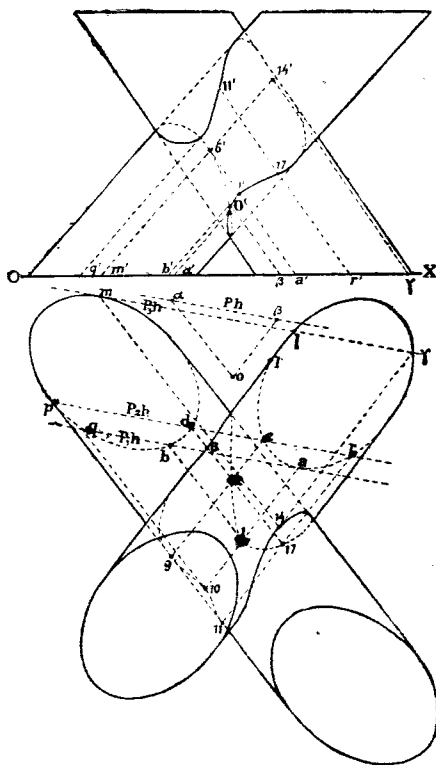
ствѣ слѣдующія построения. Черезъ случайную точку O проводимъ линіи $O\alpha$ и $O\beta$, параллельныя производящимъ обоимъ цилиндровъ, и находимъ слѣдъ Ph плоскости, въ которой лежатъ обѣ эти линіи.

Если мы теперь будемъ разсѣкать цилиндры плоскостями, параллельными P , то въ сѣченіи получатся прямыя линіи, пересѣченіе каковыхъ другъ съ другомъ и дадутъ точки искомой кривой линіи.

На черт. 354 проведена одна изъ такихъ плоскостей P_1 , и найдены производящія AA_1 , BB_1 и CC_1 , DD_1 сѣченія ея съ обоими цилиндрами. Пересѣченіе этихъ производящихъ другъ съ другомъ опредѣляетъ четыре точки 1, 2, 3, 4 искомой линіи сѣченія.

На черт. 355 показано рѣшеніе этой же задачи въ проекціяхъ. Выбираемъ случайную точку O , черезъ нее проводимъ линіи $O\alpha$ и $O\beta$, параллельныя производящимъ цилиндровъ, и находимъ горизонтальный слѣдъ Ph плоскости, заключающей въ себѣ обѣ эти линіи.

Далѣе, проведемъ плоскость P_1 , параллельную P , такъ, чтобы слѣдъ P_1h коснулся слѣда одного изъ цилиндровъ въ точкѣ a .

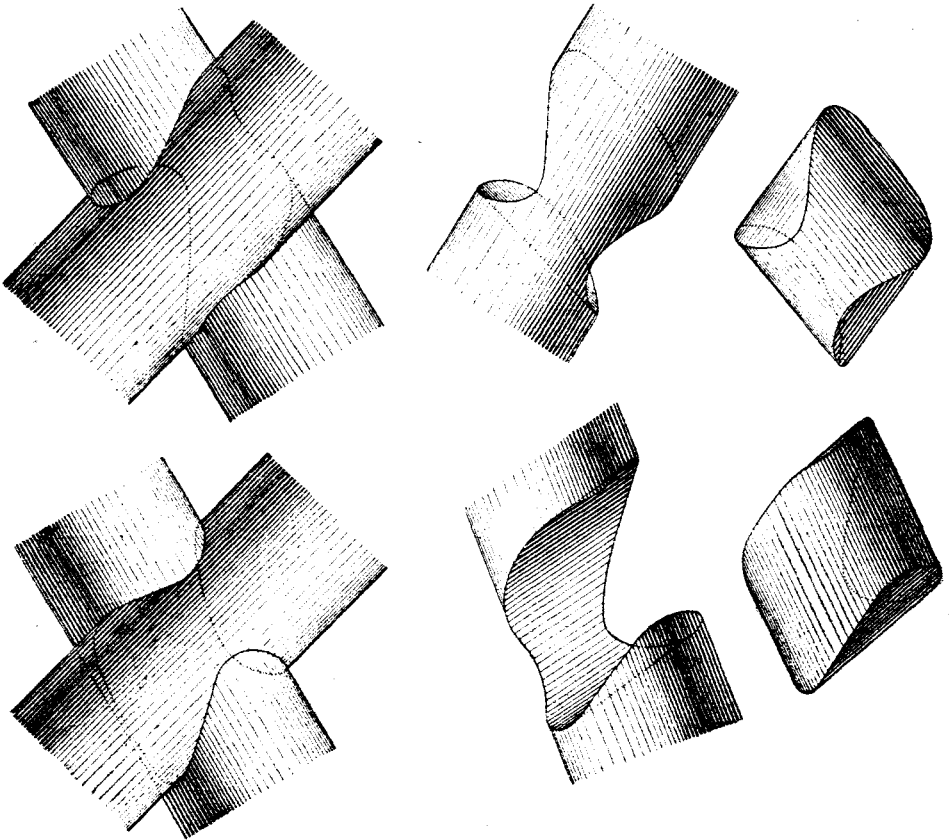


Черт. 355.

Замѣчаемъ точки b и q пересѣченія P_1h со слѣдомъ другого цилиндра и проводимъ черезъ a , b и q производящія цилиндровъ.

Пересѣченіе этихъ производящихъ п дасть точки **1** и **10**, принадлежащія искомой кривой.

Проводимъ теперь вторую плоскость $P_2 \parallel P$ и находимъ точки r , s , d , p пересѣченія слѣда ея P_2h со слѣдами обоихъ цилиндровъ. Черезъ эти точки проводимъ производящія цилиндровъ и замѣчаемъ ихъ взаим-



Черт. 356.

ныя пересѣченія въ точкахъ **2**, **9**, и **11** и **17**, каковыя также будутъ принадлежать искомой линіи.

На чертежѣ проведена еще плоскость P_3 , слѣдъ которой P_3h касается слѣда лѣваго цилиндра, и найдены подобнымъ же образомъ еще двѣ точки **6** и **14** искомой линіи.

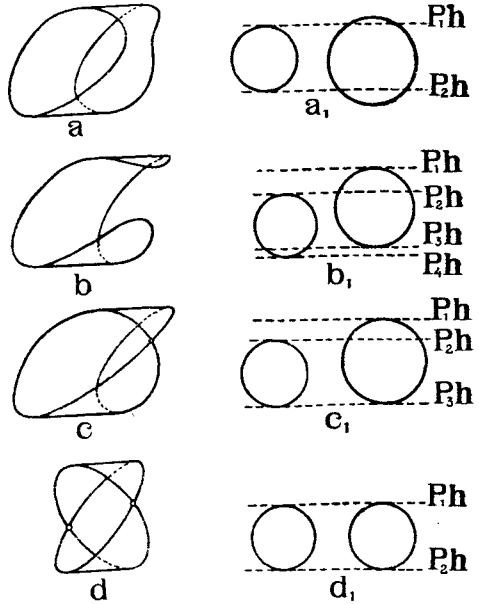
Продолжая подобныя построенія, можно найти еще проекціи ряда точекъ искомой линіи.

Соединяя эти точки по лекалу плавной кривой, получимъ проекціи осконой линіи.

На черт. 356 показаны проекціи: общаго вида обоихъ пересѣкающихся цилиндровъ, одного изъ нихъ безъ части его, отсѣкаемой другимъ, и части, общей обоимъ цилиндрамъ.

Два цилиндра могутъ пересѣкаться: 1) по двумъ отдѣльнымъ кривымъ линіямъ (черт. 357a), 2) по одной кривой линіи (черт. 357b); 3) по двумъ кривымъ линіямъ, имѣющимъ одну общую точку (черт. 357c) и 4) по двумъ кривымъ, пересѣкающимся въ двухъ точкахъ (черт. 357d).

Какой изъ этихъ четырехъ случаевъ имѣетъ мѣсто въ каждой данной задачѣ, можно судить по тому, какъ расположены слѣды Ph упомянутыхъ ранѣ вспомогательныхъ плоскостей относительно слѣдовъ цилиндровъ.



Черт. 357.

На черт. 358 справа показаны взаимныя расположенія горизонтальныхъ слѣдовъ плоскостей и цилиндровъ, соответствующихъ каждому изъ упомянутыхъ четырехъ видовъ кривыхъ линій.

Въ общемъ случаѣ два цилиндра пересѣкаются по кривой линіи двоякой кривизны. Въ частномъ же случаѣ, если оба цилиндра описаны вокругъ одного и того-же шара, то линія ихъ сѣченія является плоской ¹⁾.

Задача № 25. На чертежѣ 358 показаны проекціи двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндрическихъ сводовъ, оси которыхъ горизонтальны, взаимно перпендикулярны и пересѣкаются въ точкѣ D , а радіусы внутреннихъ и наружныхъ поверхностей которыхъ соответственно ²⁾ одинаковы.

Построить линіи сѣченія сводовъ.

Рѣшеніе. Согласно вышеприведеннаго замѣчанія линіи сѣченія цилиндровъ будутъ кривыми плоскими, а такъ какъ цилиндры круговые, то линіями сѣченія ихъ будутъ эллипсы. Таковыхъ эллипсовъ будутъ два; въ планѣ они спроектируются въ видѣ диагоналей квадратнаго помѣщенія, перекрываемого сводами.

На плоскости же V и W эти эллипсы спроектируются въ видѣ круговъ.

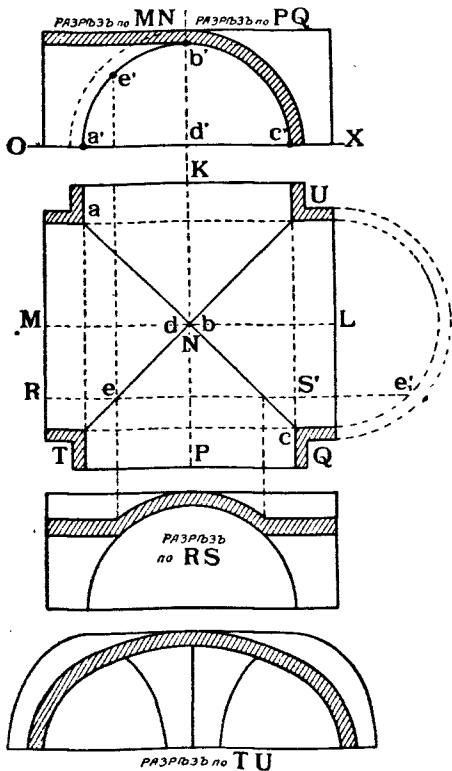
¹⁾ Доказательство см. К. Андреевъ „Аналитическая Геометрія“ 1888 г. стр. 248, Н. Рынинъ „Педоръзы“ 1901 г. стр. 61, А. Янковскій „Замѣтка къ проектированію каменныхъ сооружений“ 1908.

²⁾ Такіе своды называются *крестовыми*.

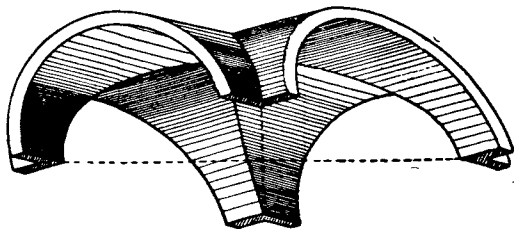
На чертежѣ показавъ рядъ разрѣзовъ свода плоскостями: *MN*, *PQ*, *RS* и *TU*.

На чертежѣ 359 изображенъ общій видъ геометрическихъ формъ свода.

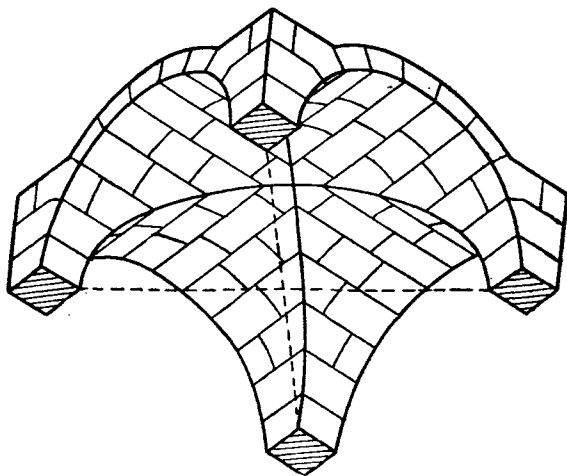
На чертежѣ 360 показано изображение подобнаго же свода въ предположеніи, что онъ сложенъ изъ тесовыхъ камней.



Черт. 358.



Черт. 359.



Черт. 360.

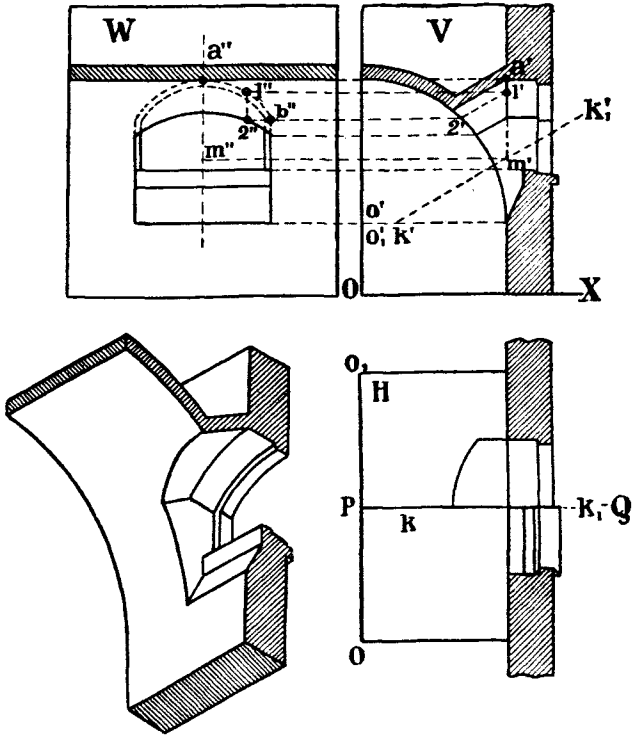
Задача № 26. Построить линію сѣченія двухъ цилиндрическихъ сводовъ: одного горизонтальнаго круговаго, перекрывающаго корридоръ (черт. 361), другого—съ наклонной осью по круглаго вертикальнаго сѣченія, перекрывающаго промежутокъ между окномъ и корридоромъ.

Рѣшеніе. На *V* линіи сѣченія цилиндровъ спроектируются въ дуги круговъ—проекціи свода, перекрывающаго корридоръ.

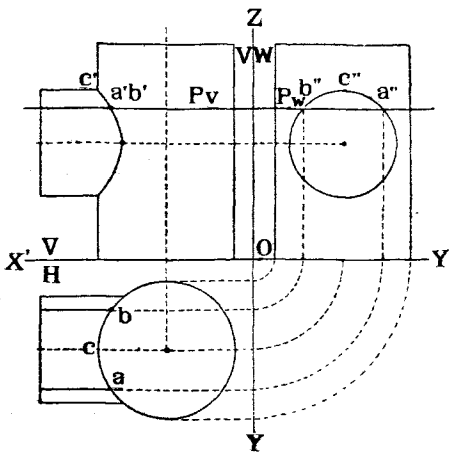
Возьмемъ какую нибудь производящую 1/2' наклоннаго цилиндра; нетрудно найти ея проекціи на *W* и на *H*. Задавшисъ рядомъ такихъ проекцій производящихъ на *V* и найдя проекціи ихъ на *W* и *H*, можно соединить видніе концы производящихъ плавной кривою, которая будетъ линіей сѣченія внутреннихъ поверхностей сводовъ. Боковыя стѣнки оконнаго проема ограничены вертикальными плоскостями.

На томъ же чертежѣ показанъ общій видъ пересѣкающихся сводовъ.

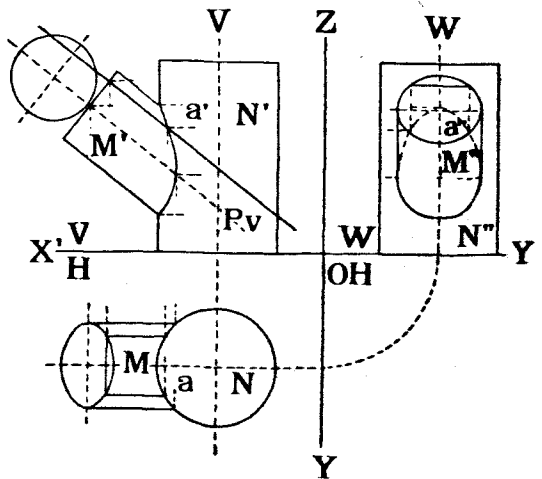
На чертежѣ 362 показано въ видѣ примѣра изображеніе проекцій линіи сѣ-



Черт. 361.



Черт. 362.



Черт. 363.

ченія двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, оси которыхъ взаимно перпендикулярны и пересѣкаются.

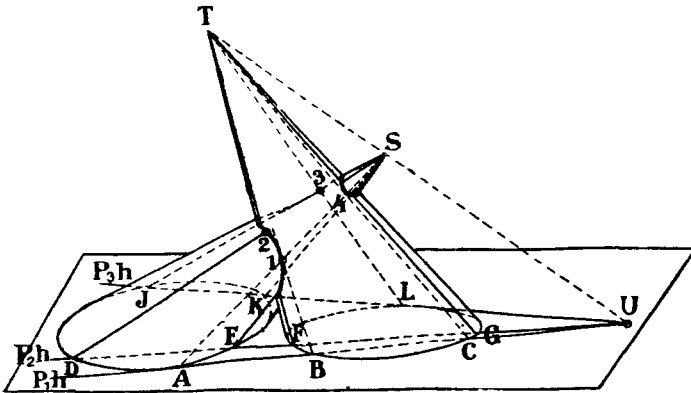
Для построения проекцій случайныхъ точекъ A и B линіи сѣченія проведена вспомогательная плоскость P , параллельная H .

На чертежѣ 363 показана линія сѣченія двухъ прямыхъ круговыхъ цилиндровъ, оси которыхъ пересѣкаются, но при этомъ не перпендикулярны другъ другу. Для построения случайной точки A линіи сѣченія проведена вспомогательная плоскость P , перпендикулярная V и параллельная оси малаго цилиндра.

Примѣръ 2-й. Построение линіи сѣченія двухъ конусовъ.

Примѣнимъ для рѣшенія этой задачи въ пространствѣ 2-й способъ (стр. 222) (черт. 364).

Соединяемъ вершины T и S конусовъ прямою линіей и проводимъ черезъ эту прямую рядъ плоскостей, пересѣкающихъ конуса по ихъ производящимъ. Пересѣченіе послѣднихъ между собою опредѣляетъ рядъ точекъ, принадлежащихъ искомому кривымъ.



Черт. 364.

На чертежѣ 364 показано построение въ пространствѣ нѣсколькихъ такихъ точекъ. Плоскость P_1 проведена черезъ линію вершинъ касательной къ конусу S по производящей AS . Въ то же время P_1 пересѣкаетъ конусъ T по производящимъ BT и CT . Точки 1 и 4 пересѣченія AS съ BT и CT принадлежатъ искомой кривой. Далѣе проведена еще плоскость P_2 , пересѣкающая конусъ S по производящимъ DS и ES и конусъ T по производящимъ FT и GT . Взаимное пересѣченіе этихъ производящихъ дастъ еще четыре точки линіи сѣченія; на чертежѣ обозначена одна изъ этихъ точекъ — 2.

Наконецъ, на чертежѣ показана еще одна плоскость P_3 , касательная къ конусу T по производящей LT и пересѣкающая конусъ S по производящимъ JS и KS . Пересѣченіе LT съ JS и KS даетъ еще двѣ точки искомой линіи сѣченія.

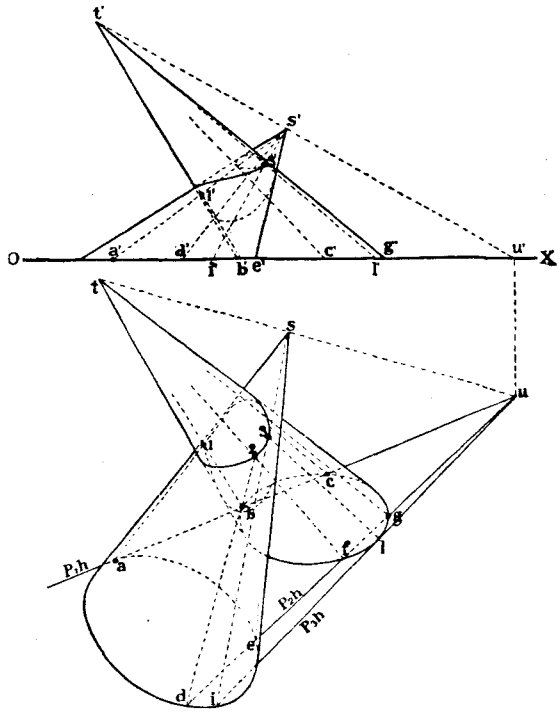
Продолжая подобныя построения, можно опредѣлить рядъ точекъ искомой кривой, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной линіей.

Замѣтимъ, что всѣ слѣды вспомогательныхъ плоскостей P , заключающихъ линію ST , должны проходить черезъ слѣдъ U этой линіи.

На чертежѣ 365 эта задача рѣшена въ проекціяхъ.

Оба конуса, эллиптического горизонтальнаго сѣченія, стоятъ на H .

Линія TS ихъ вершинъ имѣетъ горизонтальный слѣдъ въ точкѣ U , черезъ которую и проведены три плоскости P_1 , касательная къ конусу S , P_2 , пересѣкающая оба конуса, и P_3 , касательная къ конусу T . Слѣдъ P_1h будетъ касаться эллипса основанія конуса S , слѣдъ P_2h будетъ пересѣкать эллипсы основаній обоихъ конусовъ, и слѣдъ P_3h будетъ касаться эллипса основанія конуса T . Далѣе слѣдуетъ замѣтить точки пересѣченія (или касанія) слѣдовъ вспомогательныхъ плоскостей со слѣдами конусовъ, соединить полученныя точки съ соотвѣтственными вершинами и найти точки пересѣченія производящихъ разныхъ конусовъ; эти точки и будутъ принадлежать искомой кривой. На чертежѣ отмѣнены слѣдующія точки:



Черт. 365.

На чертежѣ отмѣнены слѣдующія точки:

Точки.	Пересѣкающіяся производящія.
1	AS и BT .
2	DS и FT .
3	IS и LT .

Продолжая подобныя построенія, можно опредѣлить проекціи еще ряда точекъ, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

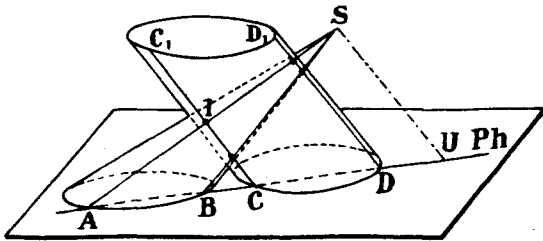
Въ частныхъ случаяхъ рѣшенія задачъ на пересѣченіе двухъ конусовъ, въ особенности, если необходимо бываетъ найти пересѣченіе профильныхъ производящихъ одного конуса съ поверхностью другого, полезно мѣнять плоскости проекцій и рѣшать задачу не въ системѣ $\frac{V}{H}$, а въ другой, въ которой производящія и линіи, бывшія ранѣе профильными, уже таковыми не являются.

Замѣтимъ, что если оба конуса будутъ описаны вокругъ одного и того же шара, то линія сѣченія ихъ будетъ плоской кривою ¹⁾.

Примѣръ 3-й. Построеніе линіи сѣченія цилиндра съ конусомъ.

Въ пространствѣ случайную точку такой линіи сѣченія можно найти слѣдующимъ образомъ (черт. 366). Проводимъ черезъ вершину конуса линію SU , параллельную производящимъ цилиндра. Черезъ такую линію можно провести плоскость P , которая и цилиндръ и конусъ пересѣчетъ по прямолинейнымъ производящимъ AB , BC и CC_1 и BD_1 . Пересѣченіе соответственныхъ производящихъ между собою и дастъ рядъ точекъ искомой линіи сѣченія. Напримѣръ AS пересѣкается съ CC_1 въ точкѣ 1.

Переходимъ къ рѣшенію задачи въ проекціяхъ (черт. 367).



Черт. 366.

Проводимъ черезъ вершину S конуса прямую SU , параллельную оси OO_1 цилиндра, и находимъ горизонтальный слѣдъ ея U .

Черезъ SU проводимъ случайную плоскость P и замѣчаемъ точки c и a , пересѣченія горизонтального слѣда ея Ph съ горизонтальными слѣдами конуса и цилиндра. Черезъ точку C проводимъ производящую цилиндра, а черезъ точку A — производящую конуса. Точка 1 пересѣченія этихъ производящихъ принадлежитъ искомой кривою линіи.

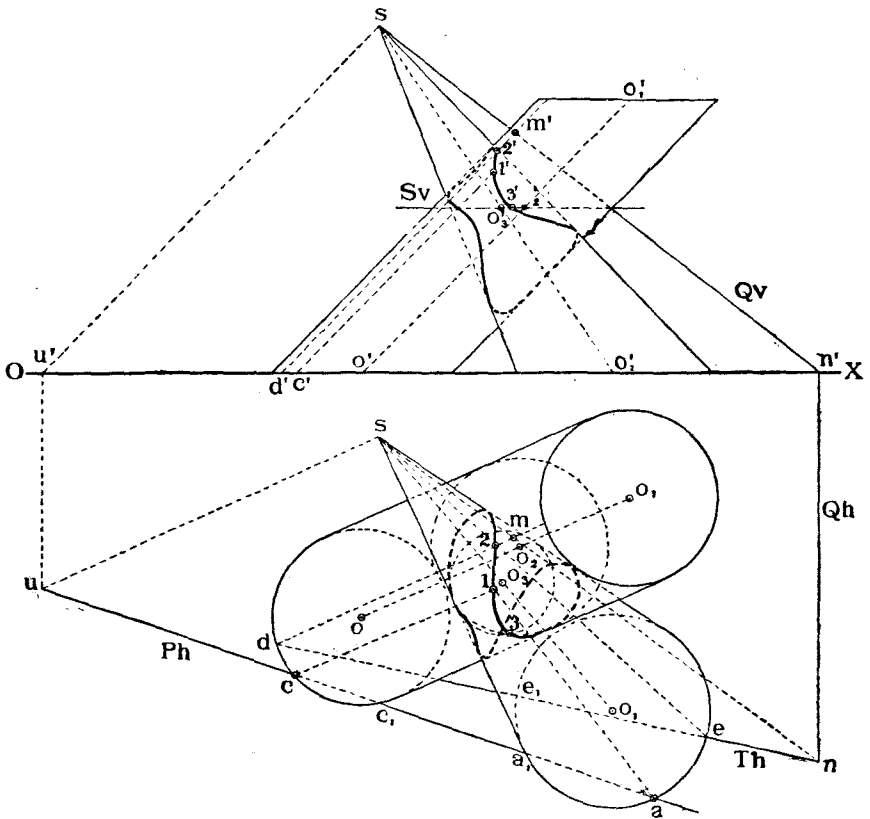
Тотъ же слѣдъ Ph пересѣкаетъ слѣды конуса и цилиндра еще въ точкахъ c_1 и a_1 , черезъ которыя можно было бы провести еще производящія конуса и цилиндра и найти, при помощи ранѣе проведенныхъ производящихъ, еще три точки искомой линіи.

Если линія SU имѣетъ слѣдъ внѣ предѣловъ чертежа, то можно воспользоваться слѣдующимъ приемомъ.

Проведемъ черезъ S плоскость $Q \perp V$ такъ, чтобы слѣды Qv и Qh располагались въ предѣлахъ чертежа. Затѣмъ выбираемъ на цилиндрѣ случайную производящую, проходящую, напримѣръ, черезъ точку D круга его основанія, и находимъ точку M пересѣченія этой про-

¹⁾ Доказательство можно найти въ сочиненіяхъ, указанныхъ внизу стр. 225.

изводящей съ плоскостью Q . Соединяемъ точки M и S и находимъ слѣдъ Th плоскости T , заключающей линіи DM и SM . Слѣдъ Th пройдетъ черезъ точку d и черезъ точку n , лежащую на Qh въ мѣстѣ пересѣченія его съ линіей SM . Замѣчаемъ точки e и e_1 пересѣченія Th съ слѣдомъ конуса и проводимъ производящія SE и SE_1 конуса, служащія линіями сѣченія конуса съ плоскостью T . На чертежѣ показана лишь

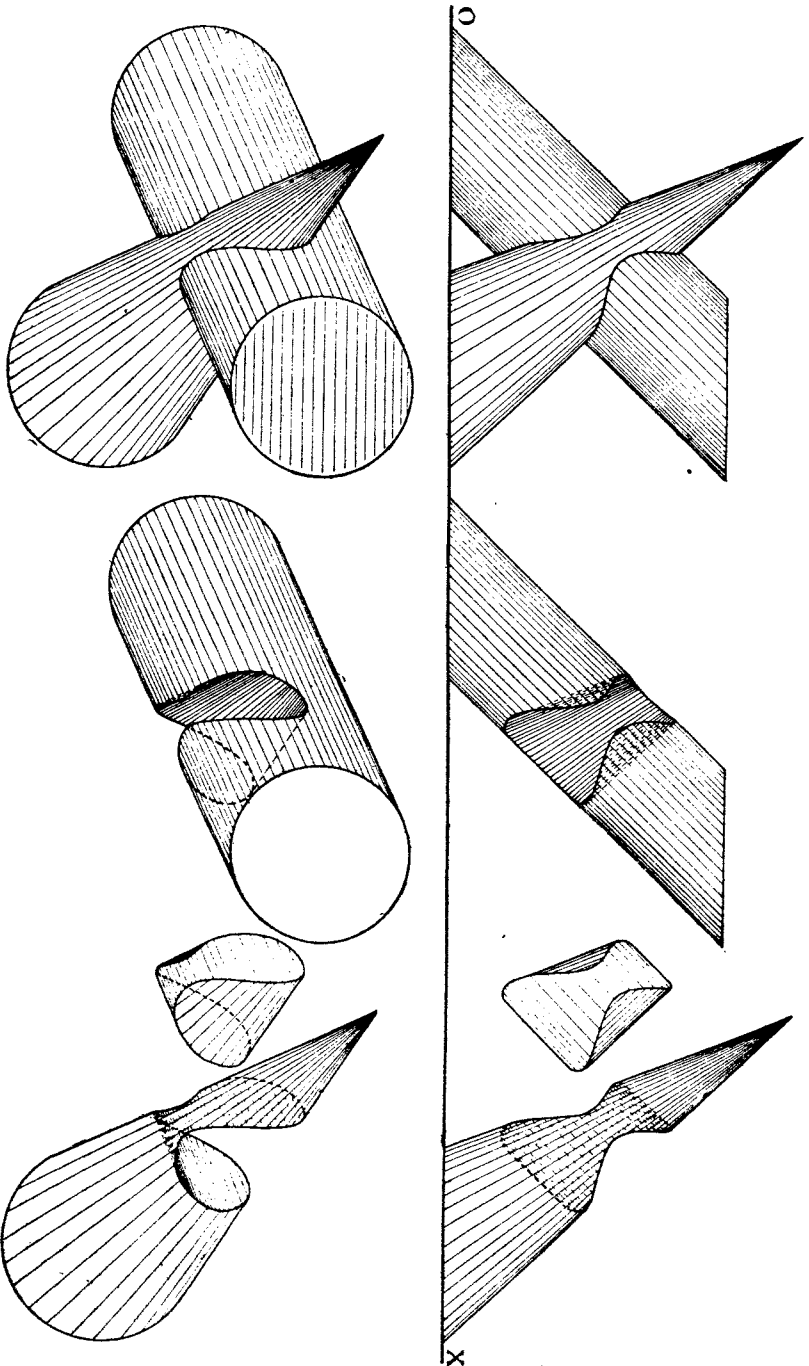


Черт. 367.

одна изъ производящихъ SE и найдена точка 2 пересѣченія ея съ производящей DM цилиндра. Точка 2 принадлежитъ искомой линіи.

Если обѣ данныхъ поверхности кругаго горизонтальнаго сѣченія, какъ это имѣетъ мѣсто въ разсматриваемомъ случаѣ, то точки искомой кривой можно опредѣлить, примѣняя 2-й изъ ранѣе упомянутыхъ способовъ (стр. 222). Проведемъ плоскость $S \parallel H$ и найдемъ круги сѣченія ея къ конусамъ (центръ круга O_3) и съ цилиндромъ (центръ круга O_2). Пересѣченіе этихъ круговъ и даетъ искомыя точки. На чертежѣ показана одна изъ такихъ точекъ 3 .

Производя рядъ подобныхъ построений, опредѣлимъ рядъ точекъ искомой



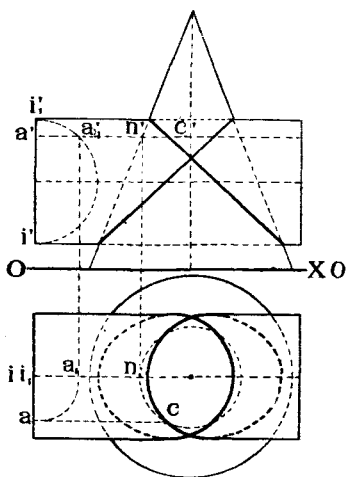
Тепл. 368.

линии свѣченія. Соединяя ихъ плавной кривою, получимъ искомую кривую.

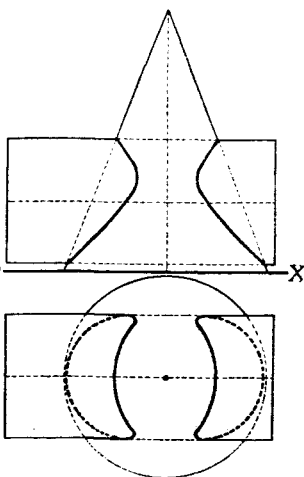
На черт. 368 показаны проекціи: 1) общаго вида пересѣкающихся поверхностей, 2) отдѣльно цилиндра, 3) отдѣльно конуса, 4) отдѣльно части общей цилиндру и конусу.

Замѣтимъ, что если цилиндръ и конусъ будутъ описаны вокругъ одного и того же шара, то линия сѣченія ихъ будетъ плоской кривою ¹⁾.

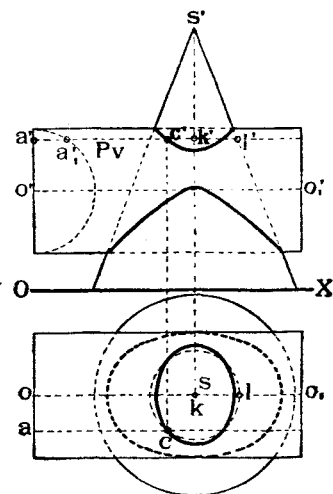
Линія сѣченія конуса съ цилиндромъ, какъ и въ случаѣ двухъ пересѣкающихся цилиндровъ или двухъ конусовъ, можетъ состоять изъ одной кривой, какъ въ случаѣ приведенномъ на чертежахъ 367 и 368, или изъ двухъ отдѣльныхъ кривыхъ (черт. 370 и 371), или изъ двухъ кривыхъ, имѣю-



Черт. 369.



Черт. 370.



Черт. 371.

щихъ общую точку, или, наконецъ, изъ двухъ кривыхъ, пересѣкающихся въ двухъ точкахъ.

На чертежѣ 369 изображенъ именно этотъ послѣдній случай.

На этомъ чертежѣ показанъ между прочимъ способъ нахождения производящихъ цилиндра, ось котораго параллельна OX . Выберемъ на прямой, представляющей проекцію на V основанія цилиндра, какуюнибудь точку a' . Чтобы найти соответствующую ей горизонтальную проекцію, при условіи, чтобы сама точка A лежала на кругѣ основанія цилиндра, вращаемъ кругъ основанія вокругъ его вертикальнаго діаметра II_1 до тѣхъ поръ, пока онъ не станетъ параллельнымъ V . Тогда точка a' придетъ въ положеніе a_1' . Горизонтальная проекція ея будетъ a_1 .

Возвращая кругъ въ прежнее положеніе, найдемъ точку a , горизонтальную проекцію точки A . Остается черезъ a и a' провести линіи, па-

¹⁾ Доказательство можно найти въ сочиненіяхъ, указанныхъ внизу стр. 225.

параллельныя OX , которыя и будутъ проекціями производящей цилиндра, проходящей черезъ точку A .

На черт. 372 показанъ общій видъ модели, изображающей пересѣчение конуса съ цилиндромъ.

Задача № 27. Построить линію сѣченія двухъ сводовъ, изъ которыхъ одинъ прямой круговой цилиндрической съ горизонтальной осью перекрываетъ корридоръ, а другой конической, круглаго вертикальнаго сѣченія, съ наклонной осью перекрываетъ промежутокъ между окномъ и первымъ сводомъ (черт. 373).

Рѣшеніе.

Для рѣшенія задачи беремъ рядъ производящихъ конуса и находимъ точки пересѣченія ихъ съ цилиндромъ. Построенія для опредѣленія этихъ точекъ начинаемъ съ проекціи на плоскости W , на которую цилиндры, ограничивающія верхнюю и нижнюю поверхности цилиндрическаго свода, проектируются въ видѣ круговъ. Выбираемъ случайную производящую конуса, проходящую, напримеръ, черезъ точку 1 круга сѣченія его поверхности съ внутренней поверхностью стѣны.

Продолжаемъ линію $s'1''$ до пересѣченія съ дугою круга—проекціей цилиндра на W , въ точкѣ $2''$. Находимъ точку $2'$ на линіи $s'1'$ и точку 2 на линіи $s1$.

Точка 2 и будетъ принадлежать искомой кривой линіи сѣченія внутреннихъ поверхностей сводовъ.

Продолжая подобныя построенія, опредѣлимъ еще рядъ точекъ внутренней и наружной линій сѣченія сводовъ.

Вокровыя стѣнки оконнаго проема ограничены плоскостями. Общій видъ пересѣченія показанъ отдѣльно на томъ же чертежѣ.

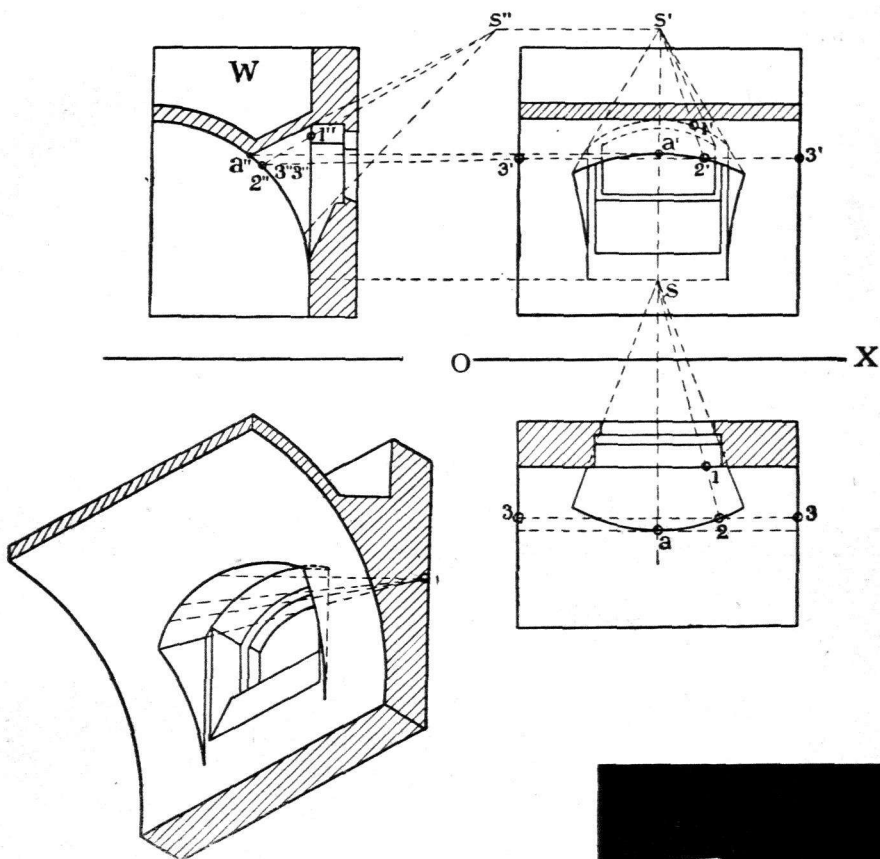
Примѣръ 4-й. Построеніе линіи сѣченія конуса или цилиндра съ шаромъ.

Для рѣшенія этой задачи при случайномъ заданіи формы конуса или цилиндра слѣдуетъ брать рядъ отдѣльныхъ производящихъ конуса или цилиндра и находить точки пересѣченія ихъ съ поверхностью шара, какъ это было уже объяснено на стр. 220. Соединяя между собой полученныя точки по лекалу, получимъ искомую кривую линію сѣченія поверхностей.

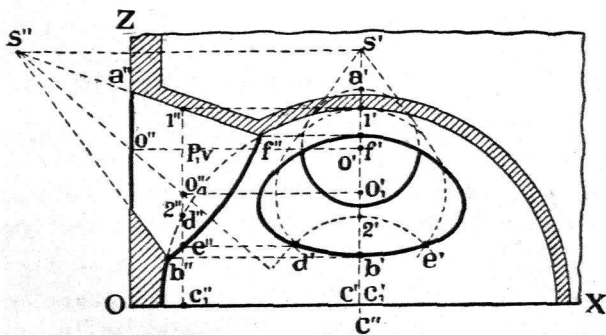
Въ частномъ случаѣ, если цилиндръ или конусъ имѣютъ въ сѣченіяхъ круги, проектирующіеся на одну изъ плоскостей проекцій безъ искаженія, рѣшеніе задачи упрощается.

На черт. 374 показанъ общій видъ сѣченія цилиндра съ шаромъ.

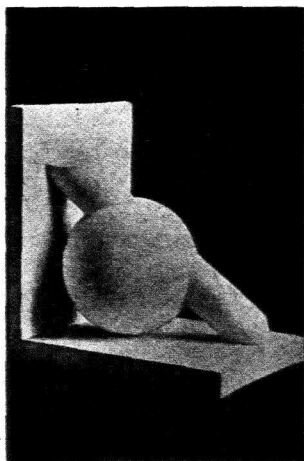
Задача № 28. Построить линию сѣченія шарового свода, перекрывающаго комнату, круглую въ планѣ, съ коническими сводами круглаго вертикальнаго сѣченія, пе-



Черт. 373.



Черт. 375.

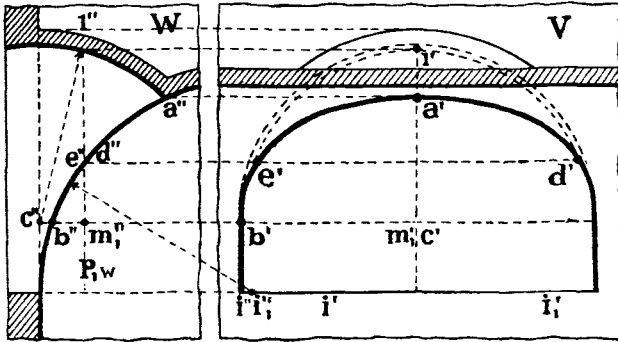


Черт. 374.

рекрывающими промежутки между шаровымъ сводомъ и сводами, расположенными въ цилиндрической стѣнѣ комнаты (черт. 375).

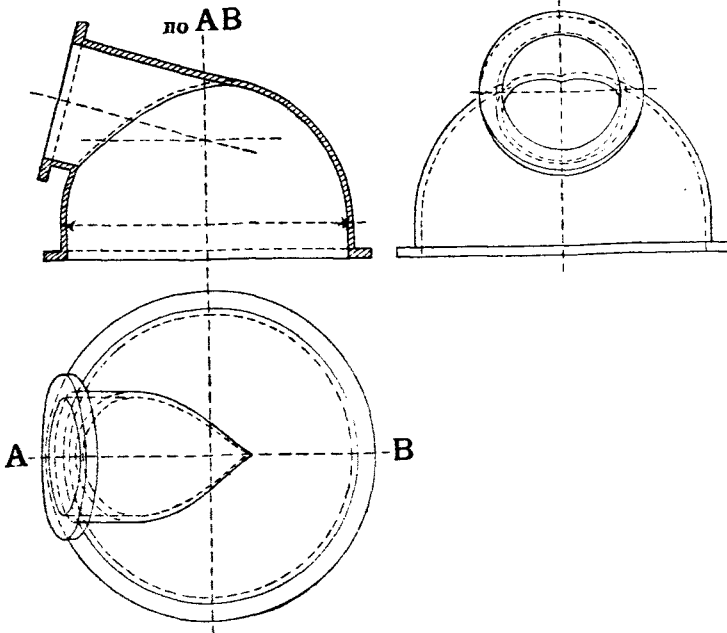
Решение.

На чертежѣ изображенъ вертикальный разрѣзъ комнаты плоскостью, параллельной V . Ввиду одинаковаго расположения оконъ относительно центра C шароваго свода, сѣченіе лѣваго окна можетъ служить какъ бы проекціей средняго окна на W .



Черт. 376.

Для построения случайнаго точки линіи сѣченія внутреннихъ поверхностей коническаго и шароваго сводовъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ:



Черт. 377.

Проводимъ профильную плоскость P_1 (слѣдъ ея $P_1\psi$), которая конусъ пересѣчетъ по кругу радиуса $o_1''1''$ съ центромъ въ точкѣ o_1'' , o_1' , а шаръ — также по

кругу радиуса $c_1''2''$ съ центромъ въ точкѣ $c_1''c_1'$. Строимъ проекціи этихъ круговъ и замѣчаемъ точки D и E ихъ пересѣченія.

Продолжая подобныя построенія, мы можемъ найти еще рядъ точекъ, которыя и опредѣляютъ искомую линію.

Задача № 29. Построить линію сѣченія цилиндрическаго свода, перекрывающаго корридоръ, съ шаровымъ сводомъ, перекрывающимъ промежутокъ между окномъ и цилиндрическимъ сводомъ (черт. 376).

Рѣшеніе.

На чертежѣ оба свода изображены въ проекціяхъ на V и W . Для построенія случайной точки искомой линіи сѣченія проводимъ плоскость P_1 параллельно V (слѣдь P_{1w}).

Эта плоскость пересѣкаетъ шаръ по кругу радиуса $m_1''1''$ съ центромъ въ точкѣ $m_1''m_1'$, а цилиндръ—по производящей ED ($e'd', e''d''$). Пересѣченіе упомянутыхъ круга и производящей опредѣляетъ точки E и D , принадлежащія искомой линіи сѣченія.

Продолжая подобныя построенія, можно найти еще рядъ точекъ, которыя и опредѣляютъ искомую линію.

На чертежѣ 377 показанъ въ проекціяхъ видъ кривой линіи сѣченія цилиндрической трубы съ шаровымъ кожухомъ турбины. Построенія для проверки правильности показанной кривой линіи предлагаемъ воспроизвести читателю.

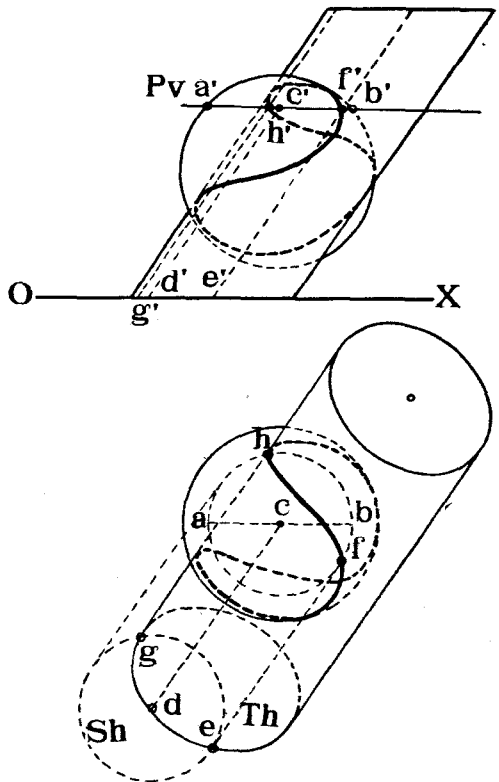
Разсмотримъ примѣненіе 3-го изъ вышеописанныхъ способовъ (стр. 222) нахождения точекъ линіи пересѣченія двухъ поверхностей при помощи вспомогательныхъ кривыхъ поверхностей, пересѣкающихъ данныя поверхности.

Примѣръ 5-й. На чертежѣ 378 изображены: шаръ и эллиптический цилиндръ. Требуется построить линію ихъ сѣченія.

Искомую линію строимъ по точкамъ.

Покажемъ, какъ найти случайную точку этой линіи.

Разсѣчемъ оба тѣла горизонтальною плоскостью P . Эта плоскость въ сѣченіи съ шаромъ даетъ кругъ радиуса $c'a'$ съ центромъ въ c', c , а въ сѣченіи съ цилиндромъ даетъ эллипсъ, одинаковый съ эллипсомъ основанія цилиндра.



Черт. 378.

Можно было бы, конечно, построить проекціи упомянутыхъ круга и эллипса, лежащихъ въ P , и найти точки ихъ пересѣченія, каковыя и были бы искомыми. Однако построение эллипса довольно затруднительно.

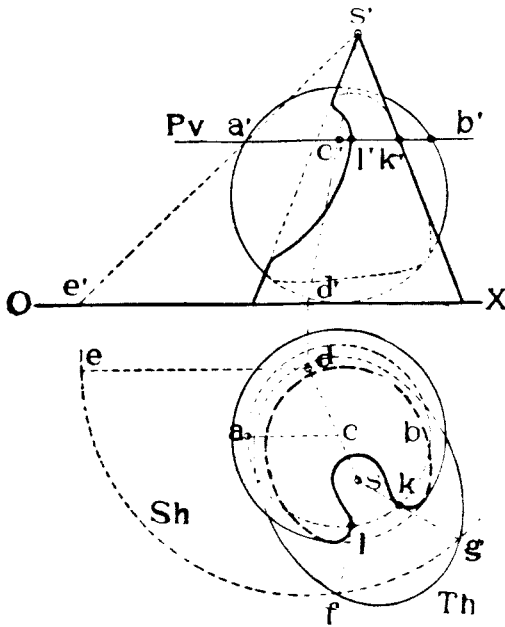
Поэтому лучше поступить такъ: проводимъ черезъ найденный кругъ цилиндръ, ось котораго CD была бы параллельна производящимъ эллиптического цилиндра, и находимъ круговой слѣдъ Sh новаго цилиндра. Новый цилиндръ и данный эллиптическій пересѣкаются по прямымъ

линіямъ, производящимъ, проходящимъ черезъ точки G и E пересѣченія слѣдовъ Sh и Th цилиндровъ.

Проводимъ эти производящія и замѣчаемъ точки H и F пересѣченія ихъ съ кругомъ ACB . Эти точки и будутъ искомыми.

Проведя еще рядъ плоскостей, параллельныхъ H , и построивъ рядъ новыхъ вспомогательныхъ цилиндровъ, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи сѣченія, каковыя затѣмъ слѣдуетъ соединить по лекалу плавной кривой.

Примѣръ 6-й. Иногда, вмѣсто вспомогательныхъ цилиндрическихъ поверхностей



Черт. 379.

выгоднѣе проводить коническія поверхности, какъ это показано на слѣдующемъ примѣрѣ (черт. 379).

Даны: шаръ и эллиптическій конусъ. Требуется построить линію ихъ пересѣченія.

Для построения случайной точки искомой линіи поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Разсѣкаемъ обѣ поверхности плоскостью $P \parallel H$. Въ сѣченіи съ конусомъ получается эллипсъ, а въ сѣченіи съ шаромъ—кругъ AB съ центромъ въ C . Чтобы не строить упомянутаго эллипса, проведемъ черезъ найденный кругъ и вершину S коническую поверхность. Ось SC послѣдней пересѣкаетъ H въ точкѣ D , а слѣдомъ поверхности будетъ кругъ Sh радіуса $d'e' = de$. Замѣчаемъ точки F и G пересѣченія круга Sh со слѣдомъ Th эллиптического конуса и соединяемъ эти точки съ вершиною S .

Линіи SF и SG являются прямыми сѣченіями двухъ конусовъ—даннаго эллиптическаго и вспомогательнаго, приче́мъ оба конуса имѣють общую вершину G .

Точки K и L пересѣченія производящихъ SF и SG кругомъ AB и будутъ принадлежать искомой линіи сѣченія.

Прово́дя рядъ плоскостей, параллельныхъ P и строя рядъ вспомога-тельныхъ конусовъ, мы получимъ еще рядъ точекъ искомой линіи, которыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

Примѣръ 7-й. Построить линію сѣченія двухъ тѣлъ вращения—эллипсоидовъ, оси каждаго параллельны V и пересѣкаются въ точкѣ O (черт. 380).

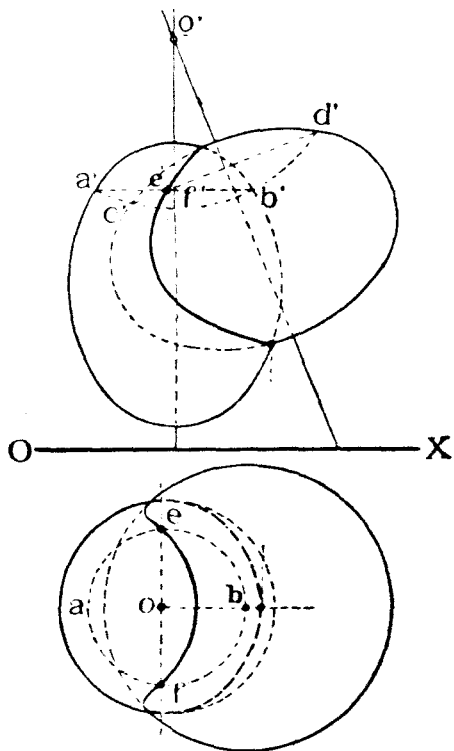
Для построения случайнаго точки линіи сѣченія проводимъ вспомога-тельную поверхность шара, съ центромъ въ O . Этотъ шаръ пересѣчетъ данныя тѣла вращения (эллипсоиды) по кругамъ, которые на V спроектируются въ прямыя линіи $a'b'$ и $c'd'$.

Въ точкѣ пересѣченія этихъ линій сливаются проекціи e' и f' двухъ точекъ искомой линіи. Строимъ кругъ ab , горизонтальную проекцію круга AB , и замѣчаемъ на немъ точки e и f , проекціи точекъ E и F , которыя и принадлежатъ искомой линіи сѣченія. Продолжая подобныя построения, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи, каковыя затѣмъ слѣдуетъ соединить плавной кривой.

Примѣръ 8-й. На чертежѣ 381 даны проекціи: 1) косою плоскости, опредѣляемой двумя парами ея производящихъ AB, CB и BC, AD , приче́мъ плоскости параллелизма производящихъ перпендикулярны къ H , и 2) винтовой коноидѣ съ направляющими—цилиндрической винтовой линіей и ея осью $\perp H$ и плоскостью параллелизма $\parallel H$.

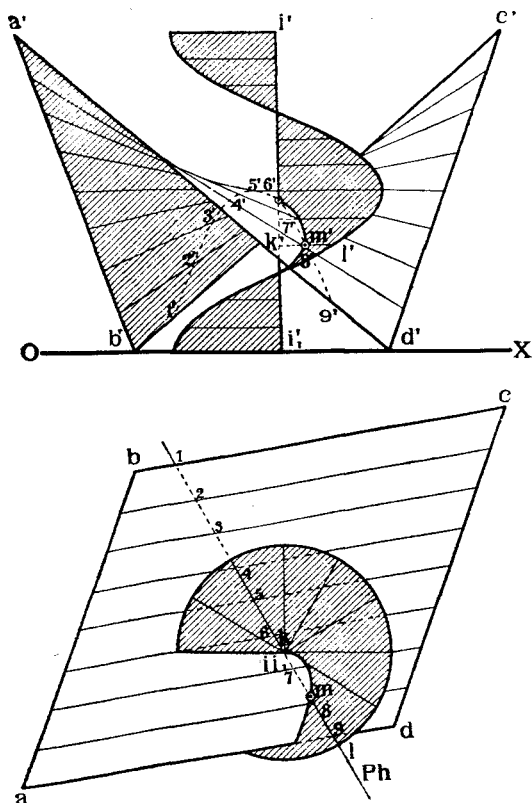
Требуется построить линію пересѣченія этихъ поверхностей.

Покажемъ, какъ строится случайная точка искомой линіи, для чего примѣнимъ 1-й изъ упомянутыхъ способовъ (стр. 222).



Черт. 380.

Выбираем на одной из поверхностей, например, на коноидѣ, случайную производящую KL и проводим через нее плоскость $P \perp H$. Замѣчаемъ точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, пересѣченія P съ производящими косою плоскости. Кривая линия 1, 2...8, 9 будетъ служить линіей сѣченія плоскости P съ косою плоскостью. Точка M пересѣченія про-



Черт. 381.

изводящей KL коноида съ найденной линіей и будетъ искомой. Продолжая подобныя построения, можно найти еще рядъ точекъ искомой линіи, которыя затѣмъ остается соединить плавной кривою.

е) *Пересѣченіе кривой поверхности съ кривою линіей.*

Обній способъ рѣшенія въ пространствѣ задачи на нахождение точекъ пересѣченія кривой поверхности съ кривою линією двоякой кривизны или плоскою, заключается въ слѣдующемъ:

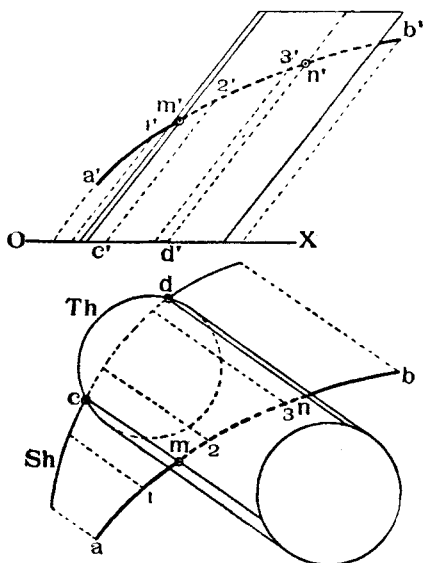
Проводимъ черезъ данную кривую линію вспомогательную поверхность. Находимъ линію сѣченія этой поверхности съ данной. Точки пересѣченія найденной линіи съ данной линіей и будутъ искомыми.

Вспомогательную поверхность слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы она въ пересѣченіи съ данной поверхностью давала, по возможности, простыя линіи—прямую или кругъ, или, чтобы построеніе таковой линіи сѣченія было, по возможности, простымъ.

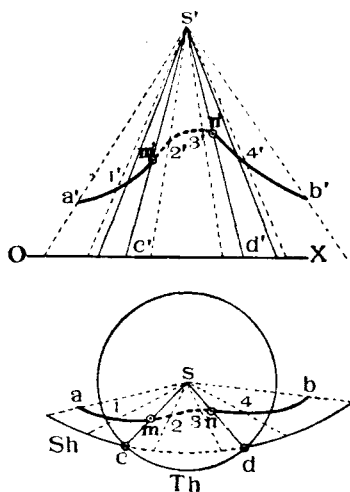
Разсмотримъ примѣненіе этого способа на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Найти точки пересѣченія кривой линіи AB съ поверхностью цилиндра (черт. 382).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ кривую AB вспомогательную цилиндрическую поверхность, производящія которой были бы параллельны производящимъ даннаго цилиндра. Находимъ слѣдъ Sh этого вспомогательнаго цилиндра.



Черт. 382.



Черт. 383.

Обѣ цилиндрическія поверхности пересѣкутся по прямымъ линіямъ проходящимъ черезъ точки C и B пересѣченія слѣдовъ Sh и Th этихъ поверхностей и параллельнымъ производящимъ щцилиндровъ. Точки M и N пересѣченія найденныхъ производящихъ CM и BN съ кривою AB и будутъ искомыми.

Примѣръ 2-й. Найти точки пересѣченія кривой линіи AB съ поверхностью конуса (черт. 383).

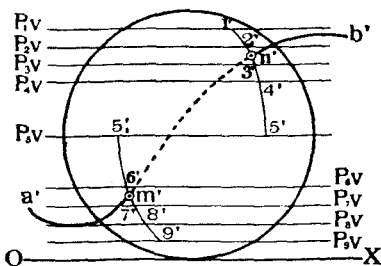
Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ вершину S даннаго конуса и черезъ рядъ точекъ кривой AB прямыя линіи, образующія вспомогательную коническую поверхность, которая, очевидно, пересѣкаетъ данную поверхность по прямымъ линіямъ.

Для нахождения послѣднихъ строимъ слѣдъ Sh вспомогательной по-

верхности и замѣчаемъ точки C и D его пересѣченія съ Th , слѣдомъ даннаго конуса.

Линіи SC и SD будутъ производящими сѣченія данной и вспомогательной коническихъ поверхностей.

Точки же M и N пересѣченія линіи AB съ найденными производящими SC и SD будутъ искомыми.



Примѣръ 3-й. Найти точки пересѣченія кривой AB съ поверхностью шара (черт. 384).

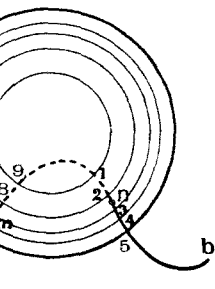
Для рѣшенія задачи заключаемъ кривую AB въ цилиндрическую поверхность S , перпендикулярную H . Горизонтальный слѣдъ Sh этой поверхности сольется съ горизонтальною проекціей ab кривой линіи.

Строимъ теперь кривыя линіи сѣченія поверхности шара п цилиндра S . Для этого разсѣкаемъ объ поверхности рядомъ горизонтальныхъ плоскостей P_1, P_2, P_3 и т. д.

Каждая такая плоскость пересѣкаетъ шаръ по кругу а цилиндръ S по кривой, при чемъ на H кругъ проектируется безъ искаженія въ кругъ же, а кривая проектируется безъ искаженія въ кривую ab .

Замѣчаемъ точку пересѣченія каждой пары такихъ линій, на примѣръ, точку 1 для плоскости P_1 , точку 2 для плоскости P_2 и т. д.

Соединяя эти точки, получимъ кривыя 1—5 и 5,—9 сѣченія шара съ цилиндромъ S . Искомыя точки опредѣляются въ мѣстахъ M и N пересѣченія найденныхъ кривыхъ линій съ данною кривою линіей AB .



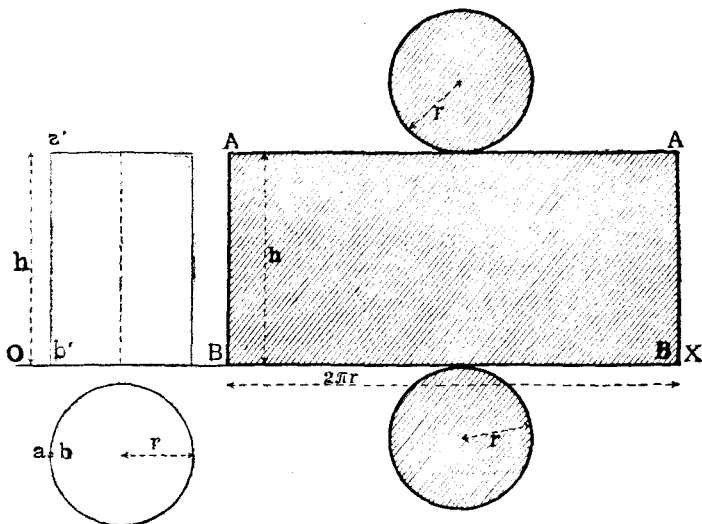
Черт. 384.

§ 20. Развертки кривыхъ поверхностей.

Ранѣе (стр. 170) было приведено подраздѣленіе различныхъ кривыхъ поверхностей на два класса: поверхности разверзаемыя и поверхности неразверзаемыя, причемъ было объяснено, что развертываться на плоскость могутъ только тѣ поверхности, у которыхъ послѣдовательныя прямолинейныя производящія или параллельны другъ другу (поверхности цилиндрическія) или пересѣкаютъ другъ друга (поверхности коническія, разверзаемые гелисоиды и поверхности одинаковаго ската).

Если же прямолинейныя производящія поверхности не параллельны и взаимно не пересекаются, или если у поверхности нѣтъ прямолинейныхъ производящихъ, а имѣются лишь криволинейныя, то такая поверхность не можетъ быть геометрически точно развернута на плоскость. Однако, въ случаѣ необходимости все же построить развертку такой поверхности, послѣднюю строить приближенно, именно, замѣняютъ данную неразверзаемую поверхность вписанной въ нее другою, которая можетъ быть развернута.

Въ качествѣ такихъ вспомогательныхъ поверхностей принимаютъ либо цилиндры, либо конуса, либо многогранники.



Черт. 385.

Развертками поверхностей пользуются на практикѣ для изготовленія моделей разныхъ сооружений, формъ для металлическихъ отливокъ, фасонныхъ листовъ въ кровельномъ и въ котельномъ дѣлѣ и т. п. Разсмотримъ способы построения развертокъ поверхностей на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Построение развертки поверхности прямого кругового цилиндра.

На черт. 385 слѣва показаны проекціи прямого кругового цилиндра, высотой h и радиуса r , стоящаго на H . Предположимъ, что поверхность цилиндра разрѣзана по производящей AB и по окружностямъ оснований. Развернемъ поверхность цилиндра въ плоскость и совмѣстимъ ее съ V . Тогда боковая поверхность цилиндра изобразится въ видѣ прямоугольника высотой h и длиною $2\pi r$, гдѣ r — радиусъ основанія цилиндра.

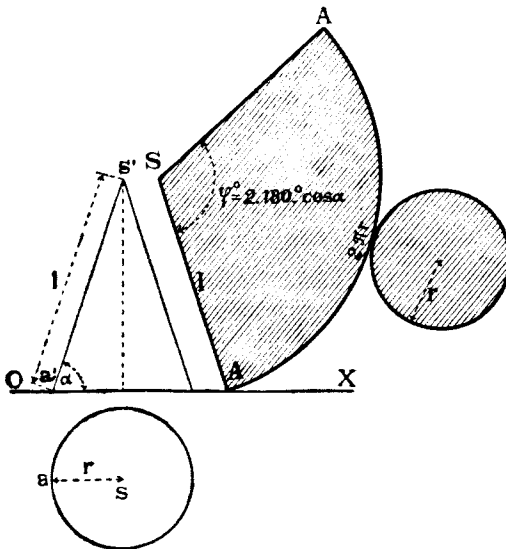
Основанія же цилиндра изобразятся въ видѣ двухъ круговъ r .

Примѣръ 2-й. Построение развертки поверхности прямого кругового конуса.

На черт. 386 слѣва показаны проекціи прямого кругового конуса, радиусъ основанія котораго r , а уголъ наклона производящихъ къ H равенъ α .

Разрѣжемъ конусъ по какой нибудь производящей SA и по окружности основанія и совмѣстимъ развертку поверхности съ V ; нетрудно видѣть, что развертка боковой поверхности конуса изобразится въ видѣ сектора круга, радиусъ котораго SA равенъ длинѣ l производящей конуса, которая въ свою очередь равна:

$$l = \frac{r}{\cos \alpha}.$$



Черт. 386.

Длина дуги AA сектора равна длинѣ окружности круга основанія конуса, т. е.:

$$AA = 2\pi r.$$

Центральный уголъ φ сектора определяется изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$2\pi r = l \cdot \varphi; \quad \varphi = \frac{2\pi r}{l} = \frac{2\pi r \cdot \cos \alpha}{r} = 2\pi \cos \alpha = 2.180^\circ \cdot \cos \alpha.$$

Основаніе конуса на разверткѣ изобразится кругомъ радиуса r .

Примѣръ 3-й. Построеніе развертки поверхности случайнаго цилиндра.

На черт. 387 изображенъ наклонный эллиптической цилиндръ, при-

Для того, чтобы спрямить дугу эллипса $LK1$, половина котораго изображена въ видѣ дуги $l_1k_11_1$, дѣлимъ послѣднюю линію точками $2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1$ и т. д., на рядъ равныхъ частей, которыя принимаемъ за прямолинейныя, а по линіи $1'1$ откладываемъ отрѣзки $1'2 = 1_12_1, 2'3 = 2_13_1, 3'4 = 3_14_1$ и т. д. Черезъ точки $2_1, 3_1, 4_1, \dots$ проводимъ линіи параллельныя $a'b'$ и откладываемъ на нихъ въ обѣ стороны отъ линіи $1'1$ отрѣзки, равные длинамъ отрѣзковъ производящихъ между сѣченіемъ $LK1$ и основаніями цилиндра. Напримѣръ, $6'6_1 = 6'6_1'$ и т. д. Полученные концы производящихъ на разверткѣ соединяемъ плавными кривыми VB и AA . Если на цилиндрѣ начерчена какая нибудь кривая линія, и требуется показать ее на разверткѣ, то можно поступить слѣдующимъ образомъ: замѣчаемъ точки пересѣченія ряда производящихъ цилиндра съ этой кривой линіей, находимъ эти производящія на разверткѣ и откладываемъ отъ линіи $1'1$ на этихъ производящихъ отрѣзки, равные удаленію точекъ кривой линіи отъ сѣченія $LK1$.

Напримѣръ, на чертежѣ показано построеніе на разверткѣ точекъ N и M кривой линіи, лежащихъ на производящей 66_1 . Изъ разсмотрѣннаго примѣра видно, что для развертки цилиндра какъ бы замѣненъ вписанной въ него многогранной призмой.

Врѣзъ 4-й. Построеніе развертки поверхности случайнаго конуса.

На чертежѣ 388 показаны проекціи случайнаго конуса съ вершиною S .

Разрѣжемъ поверхность его по производящей SA и совмѣстимъ развертку поверхности съ V . Для построенія развертки замѣнимъ поверхность конуса вписанной въ послѣднюю пирамидой, основаніемъ которой будетъ многоугольникъ $A2345\dots$, а ребрами будутъ служить производящія конуса.

При такихъ условіяхъ развертка поверхности конуса сводится къ построенію развертки пирамиды, что было уже ранѣе объяснено (стр. 120). Истинныя длины производящихъ конуса опредѣляемъ при помощи вращенія ихъ вокругъ вертикальной оси, проходящей черезъ вершину S до положенія параллельнаго V .

Напримѣръ, истинная длина производящей sa , sa' будетъ $s'a_1'$.

Полная развертка всей поверхности конуса составляется изъ ряда развертокъ треугольныхъ граней вписанной въ него пирамиды.

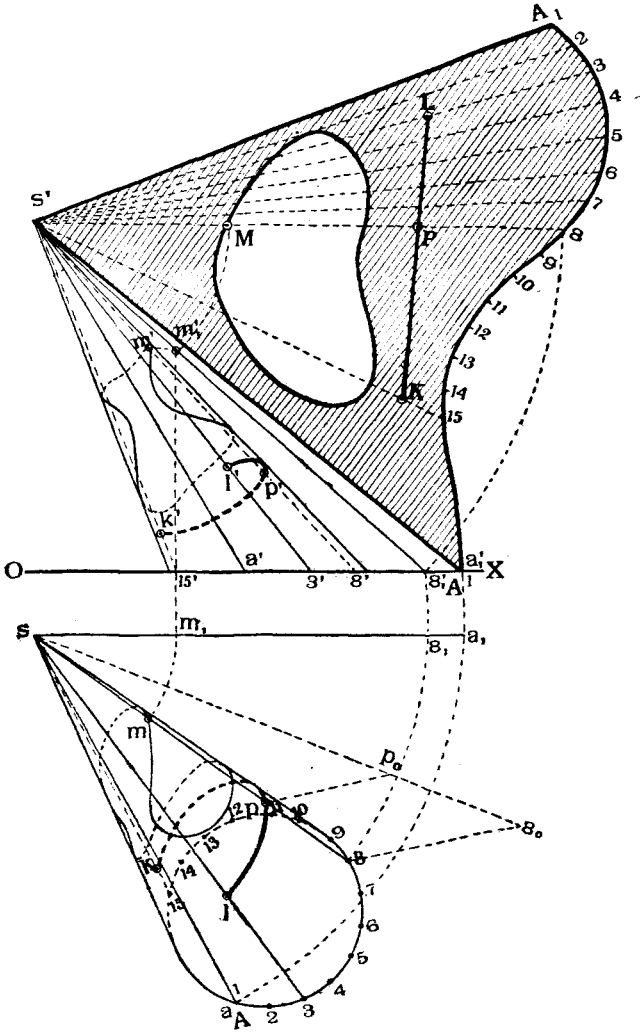
Напримѣръ, линіи $s'1$ и $s'2$ на разверткѣ равны истиннымъ длинамъ производящихъ $S1$ и $S2$ конуса, а сторона 12 на разверткѣ равна хордѣ 12 дуги основанія конуса и т. д.

Если требуется на разверткѣ конуса нанести какую нибудь линію, начерченную на поверхности конуса, то таковая линія строится по точкамъ.

Покажемъ, какъ перенести на развертку какую нибудь точку m', t , заданную на поверхности конуса.

Проводимъ черезъ M производящую $S8$. Находимъ эту производящую на разверткѣ и сносимъ точку M на эту производящую.

Иногда требуется на поверхности конуса, заданнаго въ проекціяхъ, провести между двумя точками линію кратчайшаго разстоянія, или такъ



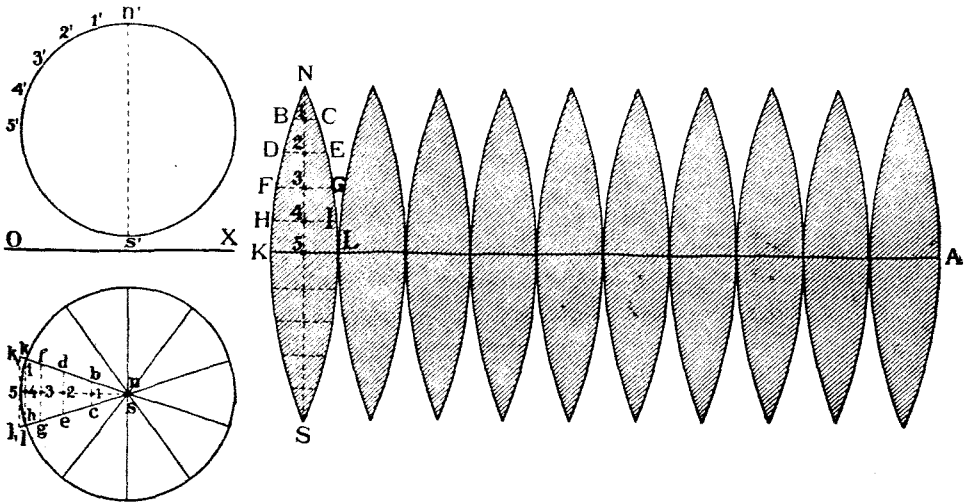
Черт. 388.

называемую *геодезическую линію*. Такая линія на разверткѣ поверхности должна преобразоваться въ прямую линію. На чертежѣ 388 такая линія и проведена между точками K и L на поверхности конуса.

Для рѣшенія этой задачи сначала находимъ точки K и L на разверткѣ и на разверткѣ же проводимъ прямую линію KL . Далѣе замѣчаемъ точки пересѣченія KL съ производящими, проведенными на разверткѣ, и переносимъ эти точки на соответственные производящія конуса.

На чертежѣ показано построение случайнѣйшей точки P геодезической линіи.

Въ планѣ изъ точки s проведена случайная линія $s8_0$, на которой отложенъ отрѣзокъ $s8_0$, равный длинѣ $s'8$ производящей на разверткѣ. Далѣе на той же прямой $s8_0$ нанесена точка p_0 въ разстояніи отъ s равномъ $s'P$ (съ развертки). Соединяемъ 8_0 съ 8 и проводимъ $p_0p \parallel 8_08$ до пересѣченія съ $s8$. Точка p и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки P , вертикальная же проекція p' будетъ лежать на $s'8'$.



Черт. 389.

Примѣръ 5-й. Построение приближенной развертки шара.

Такъ какъ шаровая поверхность принадлежитъ къ числу неразверзаемыхъ, то развертку ея можно построить лишь приближенно, замѣняя поверхность шара вписанными въ нее или описанными вокругъ нея, цилиндрическими, или коническими, или многогранными поверхностями.

На чертежѣ 389 показано построение развертки ряда цилиндрическихъ поверхностей, описанныхъ вокругъ шара. Для построения развертки шара поступаемъ слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ ось NS нѣара рядъ меридіальныхъ плоскостей подъ одинаковыми углами другъ къ другу. Дуги соответствующихъ меридіановъ разобьютъ поверхность шара на рядъ частей, которыя мы замѣняемъ цилиндрическими поверхностями. При этомъ отрѣзокъ kl экватора между смежными меридіанами

замѣняется отрѣзкомъ лиши k, l , касательной къ экватору въ точкѣ 5 и заключенной между продолженными радиусами nk и nl . Оси цилиндровъ будутъ проходить черезъ центръ шара и будутъ параллельны такимъ касательнымъ. Напримѣръ, для упомянутого вырѣзка ось цилиндра располагается параллельно касательной k, l .

Покажемъ, какъ построить развертку одного изъ вырѣзковъ шара, напримѣръ $NKSLN$. Развертки остальныхъ вырѣзковъ будутъ одинаковы съ первымъ.

Пусть взятый вырѣзокъ дѣлится меридіаномъ $N5S$, параллельнымъ V , на двѣ симметричныя части.

Дѣлимъ дугу $n'5's'$ на равныя части $n'1' = 1'2' = 2'3'$ и т. д. и проводимъ черезъ полученныя точки производящія цилиндра, замѣняющаго шаровой вырѣзокъ. Отрѣзки производящихъ этого цилиндра изобразятся въ горизонтальной проекціи безъ искаженія длинами $c1b$, $e2d$ и т. д.

Далѣе, проводимъ прямую линію KA , равную выпрямленному периметру многоугольника, описаннаго вокругъ экватора, и откладываемъ на ней длины сторонъ этого многоугольника. Напримѣръ $KL = k, l$, и т. д.

Дѣлимъ KL пополамъ точкой 5 , проводимъ изъ 5 линію \perp къ KL и откладываемъ на ней отрѣзки $N5$ и $5S$, равныя длинамъ дугъ $5'n'$ и $5's'$. Дѣлимъ лишию NS точками $1, 2, 3..$ на такое же число равныхъ частей, какъ и полумеридіанъ $n'5's'$, и черезъ полученныя точки проводимъ прямыя BC, DE и т. д., параллельныя KL .

Откладываемъ на этихъ прямыхъ части:

$$B1 = 1C = b1 = 1c;$$

$$B2 = 2E = d2 = 2e \text{ и т. д.}$$

Точки N, B, B, F и т. д. соединяемъ плавной кривой.

Полученная фигура и будетъ приближенной разверткой вырѣзки шара. Чѣмъ больше мы возьмемъ на шарѣ подобныхъ вырѣзковъ, тѣмъ больше будутъ соответствовать развертки соответственныхъ частей цилиндровъ разверткамъ шаровыхъ вырѣзковъ ¹⁾.

Задача № 30. Построить проекціи воздушнаго винта (пропеллера) по слѣдующимъ даннымъ:

- 1) диаметръ оси вала d_1
- 2) „ втулки. . d_2
- 3) „ пропеллера D .
- 4) имѣются чертежи развертокъ шести цилиндрическихъ сѣченій винта, относенныхъ къ диаметральной линіи винта и построенныхъ для цилиндровъ радиусовъ r_1, r_2, \dots, r_6 , одноосныхъ съ винтомъ.

¹⁾ Интересная задача на построение приближенной развертки неразверзаемой поверхности въ примѣненіи къ полученію выкроекъ костюма дана академикомъ Чебышевымъ. См. его полное собраніе сочиненій.

Рѣшеніе.

На чертежѣ 390 показаны всѣ построенія проекцій одной лопасти винта на плоскостяхъ *V*, *W* и *H*.

Проводимъ вертикальную линію *a'b'*, *a''b''* по длинѣ равную $\frac{D}{2} = r_1$ длинѣ лопасти. Дѣлимъ ее на части

$$\begin{aligned} b'1' &= b''1'' = r_1; \\ b'2' &= b''2'' = r_2 \dots \\ &\dots \dots \dots \\ b'6' &= b''6'' = r_6. \end{aligned}$$

Изъ точки *b'*, какъ изъ центра, описываемъ дуги круговъ радиусами *b'1'*, *b'2'...**b'6'*. Круги эти будутъ служить проекціями на *V* цилиндровъ, сѣкущихъ пропеллеръ, при чемъ предполагается, что оси этихъ цилиндровъ совпадаютъ съ осью винта и перпендикулярны къ *V*.

Въ проекціи на *W* строимъ развертки поверхностей этихъ цилиндровъ. Какъ извѣстно, каждый цилиндръ, напримѣръ, радиуса *r₆*, превращается въ прямоугольникъ, основаніе котораго равно $2\pi r_6$, а высота—равна высотѣ *h₆* цилиндра.

Будемъ строить лишь части развертки каждого цилиндра, раздѣливъ основаніе и высоту его на одно и то же число 2π . Тогда основаніе прямоугольника будетъ равно радиусу *r₆*:

$$\frac{2\pi r_6}{2\pi} = r_6,$$

а высота будетъ равна $\frac{h_6}{2\pi}$.

Величины радиусовъ *r₁...**r₆* и высотъ

$$\frac{h_1}{2\pi}, \frac{h_2}{2\pi}, \dots, \frac{h_6}{2\pi}$$

даны, такъ какъ по условіямъ задачи даны развертки сѣченій пропеллера. Проводимъ линію *6''i₆''*.

Отрѣзокъ *m₀''n₀''* этой линіи является хордой сѣченія. Само же сѣченіе заштриховано. Короткая пунктирная линія, проведенная касательной къ сѣченію параллельно *6''i₆''*, опредѣляетъ точку *e₀''*, наиболее удаленную отъ хорды *m₀''n₀''*. Расстояніе *e₀''c₀''* точки *e₀''* отъ хорды называется полною толщиной лопасти въ шестомъ сѣченіи. Отъ этого размѣра слѣдуетъ отличать непосредственную толщину лопасти *e₀''d₀''*, которая равна разности между полною толщиной и стрѣлой *c₀''d₀''* вогнутой (задней) поверхности т. е.

$$e_0''d_0'' = e_0''c_0'' - c_0''d_0''.$$

Опускаемъ изъ конца *n₀''* лопасти перпендикуляръ *n₀''n₁''* на линію *6''b''* (см. чертежъ *W* и деталь его внизу чертежа 390 справа). Прямолинейный отрѣзокъ *n₀''n₁''* наворачиваемъ на дугу *b'1'* на чертежѣ *V*. Точка *n'* и будетъ принадлежать очертанію проекціи винта на *V*. Проводимъ изъ *n'* линію параллельную *6''b''* до пересѣченія съ *n₀''n₁''* въ точкѣ *n''*, которая будетъ принадлежать очертанію проекціи винта на *W*. Остальныя точки контуровъ проекцій винта на *W* и *V* строятся подобнымъ же образомъ.

Замѣтимъ, что сѣченіе 1-ое лопасти немного отодвинуто по направленію *f₀''f₁''* \perp *1''i₁''* настолько, чтобы оно касалось линіи *1''i₁''*.

При этомъ для опредѣленія толщины лопасти достаточно провести лишь одну пунктирную линію, касательную къ сѣченію и параллельную *1''i₁''*. Такъ-же построено и сѣченіе 2-ое.

Такъ какъ точки *i₁''*, *i₂''...**i₆''* даны не совпадающими другъ съ другомъ, а уда-

ленными отъ диаметральной линіи $a''b''$ винта на разныя разстоянія, то это показываетъ, что цилиндрическія винтовыя линіи, [которыя на разверткахъ превращаются въ линіи хордъ разныхъ сѣченій, имѣютъ разный шагъ. Поэтому и изображенный на чертежѣ 390 винтъ называется винтомъ переменнаго шага.

Имѣя проекціи винта на V и W , нетрудно построить проекцію его и на H .

На чертежѣ 390 показана еще приближенная развертка задней (вогнуто-выпуклой) поверхности лопасти. Чертежъ ея ориентированъ относительно линіи AB . Покажемъ, какъ строится такая нибудь точка N этой развертки, соответствующая точкѣ P въ разстояніи r , отъ B . Линія NM проведена черезъ $P \perp AB$. Длина PN равна выпрямленной дугѣ $p''n_0''$ по чертежу W или по детали его (внизу справа на черт. 390). Подобнымъ же образомъ $MP = m_0''r''$.

Иногда вмѣсто развертки самой поверхности лопасти дѣлаютъ развертку поверхности, образуемой хордами сѣченій.

Тогда на разверткѣ отрезки PN и PM будутъ соответственно равны отрезкамъ $6''n_0''$ и $6''m_0''$ и т. д.

Наконецъ, на черт. 390 справа показана діаграмма полныхъ толщинъ лопасти въ разныхъ сѣченіяхъ. Напримѣръ $CE = c_0''e_0''$, $QS = q_0''s_0''$ и т. д. Замѣтимъ, что эта діаграмма не выражаетъ сѣченіе лопасти какой нибудь плоскостью, а показываетъ лишь, какъ мѣняется полная толщина лопасти въ разныхъ цилиндрическихъ сѣченіяхъ винта.

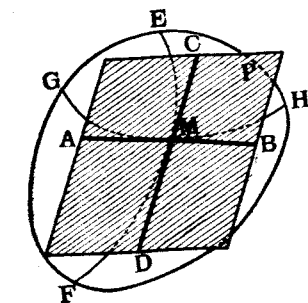
Винтъ, изображенный на чертежѣ 390 построенъ примѣнительно къ даннымъ Шюверера. Ребро выхода его — прямая линія. Въ проекціи на W большая часть проекціи винта ограничена двумя вертикальными линіями.

На чертежѣ стрѣлками показано направленія вращенія и поступательнаго движенія винта.

§ 21. Плоскости, касательныя къ кривымъ поверхностямъ.

а) Общія замѣчанія.

Плоскостью, касательной къ кривой поверхности въ данной точкѣ M послѣдней (черт. 391), называется такая плоскость (P), которая заключаетъ въ себѣ двѣ прямыя линіи AB и CD , проходящія черезъ точку M и соответственно касательныя къ кривымъ линіямъ GH и EF поверхности, проходящимъ также черезъ точку M .



Черт. 391.

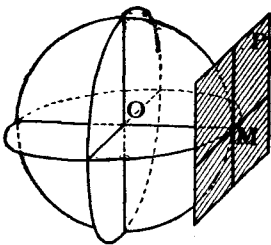
Иногда касательная плоскость къ кривой поверхности имѣетъ съ послѣдней лишь одну общую точку, напримѣръ, въ случаѣ шара (черт. 392). Иногда касательная плоскость имѣетъ съ поверхностью рядъ общихъ точекъ, лежащихъ на одной прямой линіи (SB), называемой линіей касанія, напримѣръ, въ случаѣ конуса (черт. 393).

Иногда же плоскость, касательная къ поверхности въ нѣкоторой точкѣ M , можетъ пересѣкать поверхность или по двумъ прямымъ линіямъ, напримѣръ, въ случаѣ косої плоскости (черт. 394), или по одной

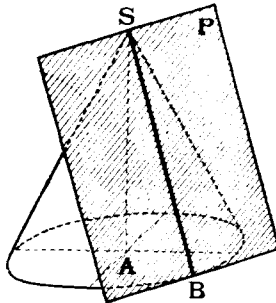
прямой и по одной кривой, на примѣръ, въ случаѣ цилиндрида (черт. 395) или по двумъ кривымъ линиямъ, какъ это на примѣръ, показано на черт. 396.

Всѣ задачи на проведеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ, можно раздѣлить на слѣдующіе шесть главныхъ типовъ:

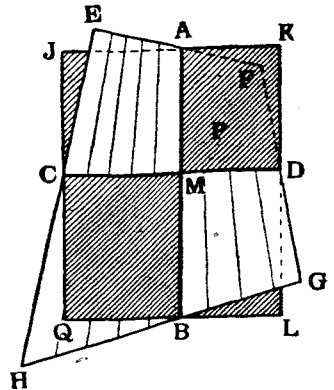
1. Провести плоскость, касательную къ поверхности въ данной точкѣ послѣдней.



Черт. 392.

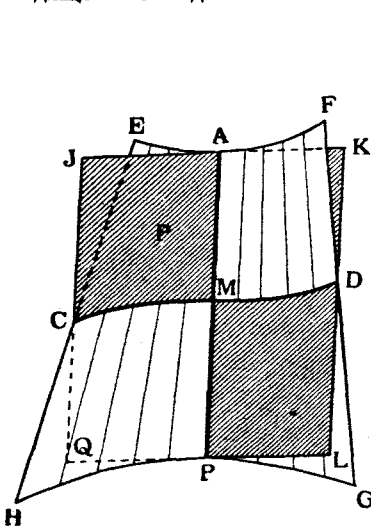


Черт. 393.

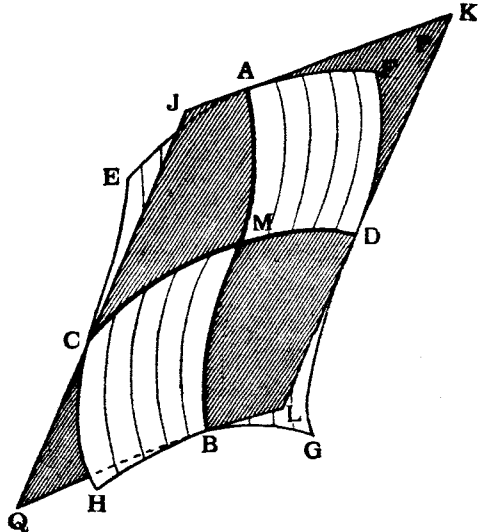


Черт. 394.

2. Провести плоскость, касательную къ поверхности по данной производящей послѣдней.



Черт. 395.



Черт. 396.

3. Провести плоскость, касательную къ поверхности и проходящую черезъ данную внѣшнюю точку.

4. Провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную данной прямой линіи.

5. Провести плоскость, касательную къ поверхности и проходящую через данную прямую линію.

6. Провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную данной плоскости.

Разсмотримъ послѣдовательно рѣшеніе задачъ, относящихся къ этимъ типамъ.

в) *Плоскость, касательная къ поверхности въ данной точкѣ послѣдней.*

Общій способъ рѣшенія этой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ (черт. 391):

Проводимъ черезъ данную точку M на поверхности двѣ какихъ-нибудь плоскости и находимъ линіи GH и EF ихъ сѣченія съ поверхностью, которыя очевидно будутъ пересѣкаться въ точкѣ M . Проводимъ черезъ M двѣ прямыя AB и CD соответственно касательныя къ полученнымъ кривымъ. Эти двѣ прямыя и опредѣляютъ искомую касательную плоскость.

Разсмотримъ примѣненіе этого способа на примѣрахъ.

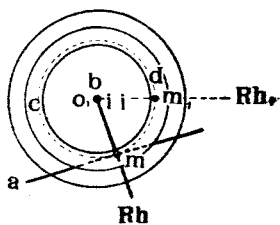
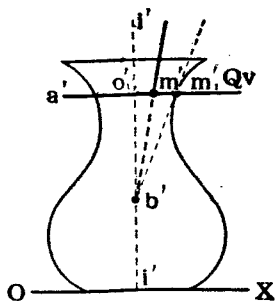
Примѣръ 1-й. Провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія въ данной точкѣ ея M (черт. 397).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ точку M двѣ вспомогательныя плоскости: одну Q горизонтальную, разсѣкающую поверхность по кругу CDM съ центромъ въ O_1 , а другую B вертикальную, проходящую черезъ ось вращенія II . Проводимъ черезъ точку M прямую AM , касательную къ кругу CDM . Для проведенія же черезъ M прямой

линіи касательной къ кривой сѣченія плоскости B съ поверхностью, вращаемъ B вмѣстѣ съ точкою M вокругъ II до положенія, параллельнаго V . Тогда точка M придетъ въ положеніе $M_1 (m, m_1')$, а кривая сѣченія совпадаетъ съ очертаніемъ (контуромъ видимости) данной поверхности на V . Проводимъ въ точкѣ m_1' линію $b'm_1'$, касательную къ контурной кривой и поворачиваемъ точку M_1 обратно.

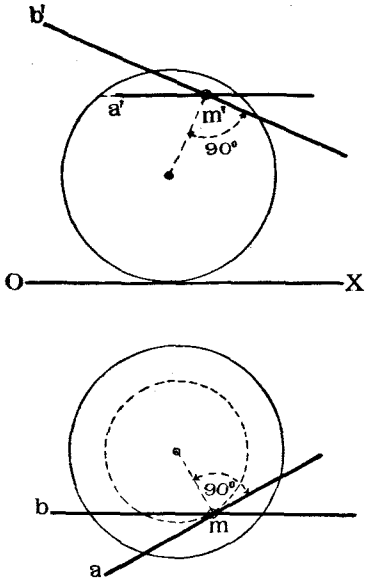
Тогда прямая M_1B займетъ положеніе MB и вмѣстѣ съ прямой AM опредѣлитъ искомую плоскость.

Примѣръ 2-й. Провести плоскость, касательную къ шару въ точкѣ M его поверхности (черт. 398).

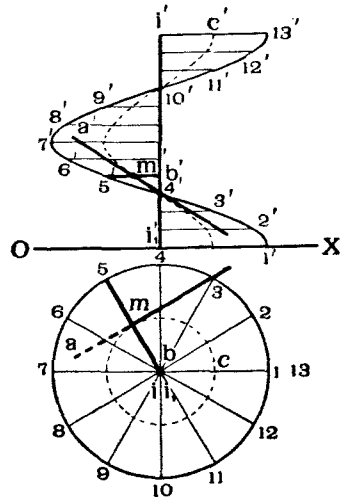


Черт. 397.

Рѣшеніе этой задачи допускаетъ упрощеніе, по сравненію съ предыдущей. Такъ какъ плоскость, касательная къ шару въ точкѣ M , должна быть перпендикулярна къ радіусу шара, проведеннаго черезъ эту точку, то задача сводится къ проведенію черезъ точку M плоскости, перпендикулярной къ этому радіусу.



Черт. 398.



Черт. 399.

На чертежѣ искомая плоскость опредѣлена ея горизонталью AM и фронтальною BM , приче́мъ на основаніи теоремы 9-й (стр. 33) am перпендикулярна къ горизонтальной проекціи радіуса, а $b'm'$ —перпендикулярна къ вертикальной проекціи радіуса.

Примѣръ 3-й. Провести плоскость, касательную къ винтовому коноиду въ данной точкѣ M его поверхности (черт. 399).

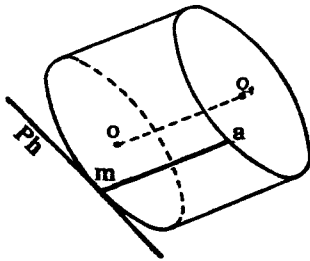
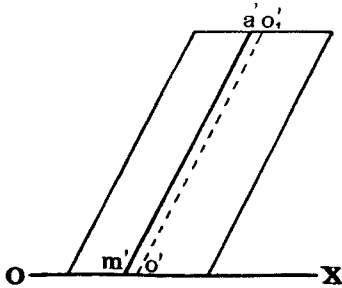
Для рѣшенія этой задачи проводимъ на поверхности коноида черезъ точку M двѣ линіи: производящую $5B$ и винтовую MC —одноосную съ винтовой $1,13$. Къ винтовой MC проводимъ въ точкѣ M касательную AM (см. стр. 167), которая вмѣсто прямой $5B$ и опредѣлитъ искомую касательную плоскость.

с) *Плоскость, касательная къ поверхности по данной прямолинейной производящей послѣдней.*

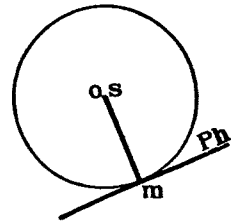
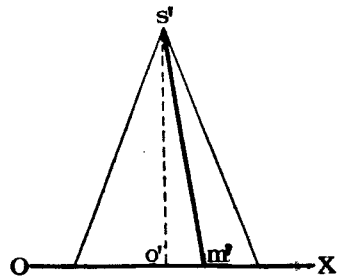
Эта задача относится только къ линейчатымъ поверхностямъ, т. е. къ такимъ, которыя могутъ быть образованы движеніемъ прямой линіи,

и является частнымъ случаемъ предыдущей задачи, именно, здѣсь одна изъ кривыхъ линій сѣченія, о которыхъ ранѣе говорилось (черт. 391), можетъ быть замѣнена прямою производящею, которая и служитъ одною изъ прямыхъ, опредѣляющихъ искомую плоскость; остается найти лишь вторую прямую.

Иногда задача является опредѣленною, иногда же неопредѣленною, т. е. иногда можно провести черезъ данную производящую только одну



Черт. 400.



Черт. 401.

плоскость, касательную къ кривой поверхности, иногда же безчисленное множество.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 4-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру по данной его производящей AM (черт. 400).

Для рѣшенія этой задачи проводимъ въ точкѣ M , слѣдѣ на H производящей AM , линію Ph , касательную къ слѣду цилиндра. Линіи Ph и AM и опредѣляютъ искомую плоскость, причѣмъ Ph является ея горизонтальнымъ слѣдомъ.

Примѣръ 5-й. Провести плоскость, касательную къ конусу по данной его производящей SM (черт. 401).

Задача рѣшается такъ же, какъ и предыдущая. Находимъ слѣдъ M данной производящей и черезъ него въ плоскости H проводимъ линію Ph , касательную къ горизонтальному слѣду конуса. Линіи SM и Ph и опредѣляютъ искомую плоскость.

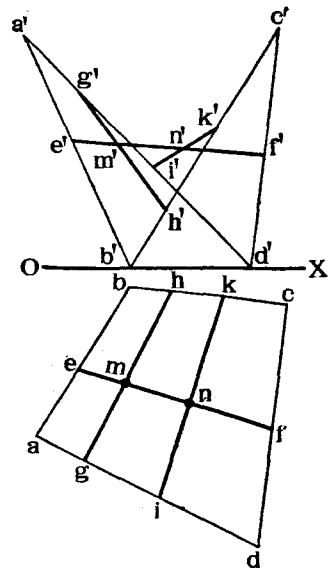
Примѣръ 6-й. Провести плоскость, касательную къ косої плоскости по данной ея производящей EF (черт. 402). Косая плоскость задана двумя направляющими AD и CD и двумя производящими BC и AD . Линія EF принадлежитъ къ числу производящихъ.

Эта задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, такъ какъ черезъ любую точку данной производящей EF можно провести прямолинейную направляющую косої плоскости, которая вмѣстѣ съ EF опредѣлитъ плоскость, касательную къ косої плоскости. Построимъ одну изъ этихъ плоскостей.

Задаемся на EF какой нибудь точкой M и примемъ ее за точку касанія. Чтобы провести черезъ M прямолинейную направляющую, слѣдуетъ черезъ M провести вспомогательную плоскость, параллельную направляющимъ AB и CD и найти точки G и H пересѣченія этой плоскости съ производящими AD и BC . (На чертежѣ эти построения не показаны).

Соединяя точки G и H , получили прямую GMH , которая вмѣстѣ съ EF и опредѣляетъ плоскость, касательную къ косої плоскости въ точкѣ M .

На чертежѣ 402 показана еще одна плоскость, касательная къ косої плоскости въ точкѣ N и опредѣляемая данной производящей FF' и направляющей IK .



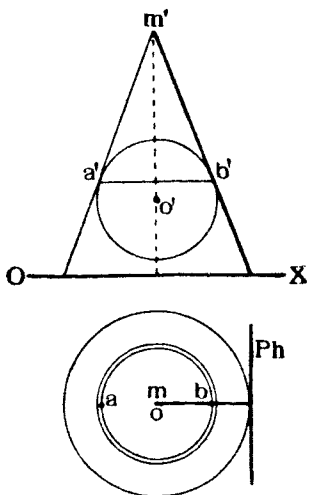
Черт. 402.

- d) *Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную внутреннюю точку.*

Общій способъ рѣшенія такой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: принимаемъ данную точку за вершину нѣкоторой конической поверхности, обертывающей данную поверхность. Тогда всякая плоскость, касательная къ этой обертывающей поверхности, будетъ касаться данной поверхности и проходить черезъ заданную точку. Такъ какъ обертывающая поверхность иногда можетъ обратиться въ плоскости, касательныя къ данной поверхности, то задача можетъ имѣть или безчисленное множество рѣшеній, или нѣсколько, или, въ частномъ случаѣ, одно рѣшеніе.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 7-й. Провести плоскость, касательную къ шару и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 403).



Черт. 403.

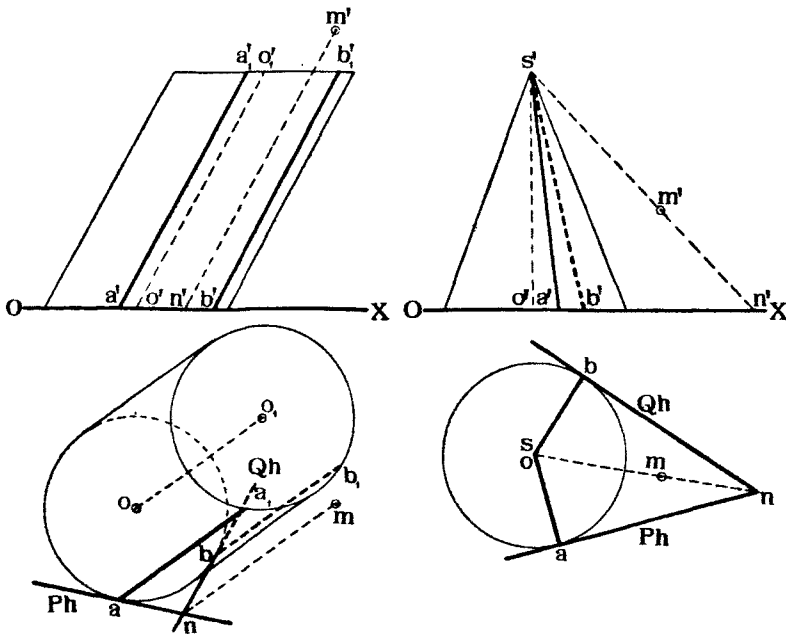
Предположимъ, что линія OM , соединяющая центръ O шара съ точкой M , перпендикулярна къ H . Если бы этого не было дано, то къ такому заданію всегда легко перейти, пользуясь методами вращенія или перемѣнной плоскостей проекцій.

Принимаемъ точку M за вершину конуса, описаннаго вокругъ шара и касающагося шара по кругу AB . Всякая плоскость, касательная къ этому конусу, очевидно, будетъ касаться и шара.

На чертежѣ показана одна изъ такихъ плоскостей, опредѣляемая слѣдомъ Ph и производящей MB .

Примѣръ 8-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 404).

Для рѣшенія задачи проведемъ черезъ M линію MN , параллельную



Черт. 404.

Черт. 405.

оси цилиндра, и найдемъ ея слѣдъ N на H . Черезъ точку N можно провести двѣ линіи Ph и Qh , касательныя къ слѣду цилиндра. Каждая

изъ этихъ линий вмѣстѣ съ линіей MN опредѣляетъ плоскость, касательную къ цилиндру.

Задача допускаетъ два рѣшенія. Одна плоскость P касается цилиндра по производящей AA_1 , другая Q — по производящей BB_1 .

Если бы цилиндръ былъ заданъ не круговымъ, а зигзагообразнымъ (черт. 253), то, въ зависимости отъ вида цилиндра, можно было бы провести одну, двѣ, три или болѣе плоскостей, къ нему касательныхъ.

Примѣръ 9-й. Провести плоскость, касательную къ конусу и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 405).

Соединяемъ точки S и M и находимъ слѣдъ N линіи SM на плоскости основанія конуса. Изъ точки N проводимъ линіи Ph и Qh , касательныя къ кругу основанія конуса въ точкахъ A и B . Каждая изъ линій Ph и Qh вмѣстѣ съ линіей SN опредѣляетъ плоскость, касательную къ конусу. Производящими касанія служатъ линіи AS и BS .

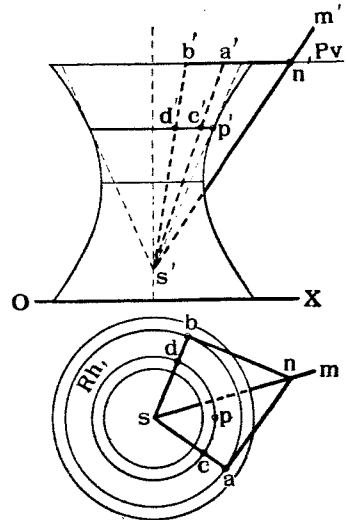
Примѣръ 10-й. Провести плоскость, касательную къ однополуму гиперболоиду вращенія и проходящую черезъ внѣшнюю точку M (черт. 406).

Задача, какъ и въ примѣрѣ 7-мъ, допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Построимъ одну какую нибудь плоскость, касательную къ гиперболоиду въ нѣкоторой, пока неизвѣстной, точкѣ, лежащей, напримѣръ, на кругѣ CPD .

Впишемъ въ гиперболоидъ конусъ, одноосный съ гиперболоидомъ и касательный къ послѣднему по кругу CPD . Для того, чтобы найти вершину этого конуса, достаточно провести въ точкѣ P , лежащей на меридіанѣ гиперболоида, параллельномъ V , касательную къ этому меридіану, и найти точку S пересѣченія этой касательной съ осью гиперболоида. Точка S и будетъ вершиной конуса.

Остается теперь провести черезъ точку M плоскость, касательную къ конусу. Рѣшеніе такой задачи было дано въ примѣрѣ 9-мъ на этой страницѣ.

Однако, въ нашемъ случаѣ основаніе конуса не лежитъ въ H . Поэтому находимъ слѣдъ N линіи SM не на H , а на плоскости P основанія конуса, и черезъ точку N проводимъ линіи NA и NB касательныя къ кругу основанія конуса. Каждая изъ прямыхъ AN и BN вмѣстѣ съ прямой SN опредѣляетъ плоскость, касательную къ гиперболоиду.



Черт. 406.

е) *Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной прямой линіи.*

Общій способъ рѣшенія этой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ:

Проводимъ рядъ линій, касательныхъ къ данной поверхности и параллельныхъ данной линіи. Совокупность этихъ линій образуетъ нѣкоторый цилиндръ, обертывающій данную поверхность. Всякая плоскость, касательная къ этому цилиндру, будетъ касательна и къ данной поверхности. Поэтому при кривой поверхности случайнаго вида задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній.

Въ частныхъ случаяхъ заданія поверхности обертывающій цилиндръ можетъ обратиться въ плоскости—одну, двѣ или нѣсколько.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 11-й. Провести плоскость, касательную къ конусу и параллельную прямой MN (черт. 407).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ вершину S конуса прямую SA , параллельную MN , и находимъ ея слѣдъ A на плоскости основанія конуса.

Изъ A проводимъ линіи Ph и Qh , касательныя къ кругу основанія конуса въ точкахъ C и B .

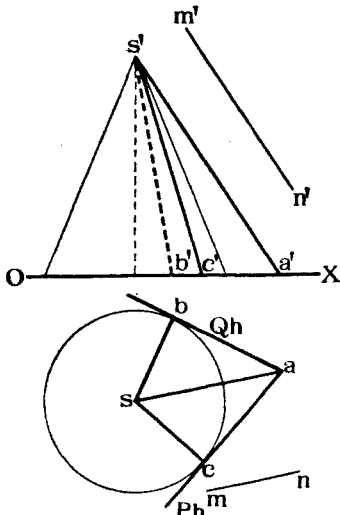
Линіи Ph и SC , а также Qh и SB опредѣляютъ двѣ плоскости P и Q , удовлетворяющія условіямъ задачи.

Производящими касанія будутъ служить линіи SC и SB .

Примѣръ 12-й. Провести плоскость, касательную къ цилиндру и параллельную прямой MN (черт. 408).

Для рѣшенія этой задачи проводимъ черезъ какую нибудь точку O_2 оси цилиндра линію, параллельную прямой MN , и находимъ ея слѣдъ A на плоскости основанія цилиндра.

Соединяемъ точки O_1 и A . Слѣды Ph и Qh искомымъ плоскостей должны быть параллельны линіи O_1A и должны касаться круга основанія цилиндра въ точкахъ B и D , лежащихъ на діаметрѣ BD круга основанія, перпендикулярномъ къ O_1A . Производящими касанія будутъ служить линіи BC и BE .



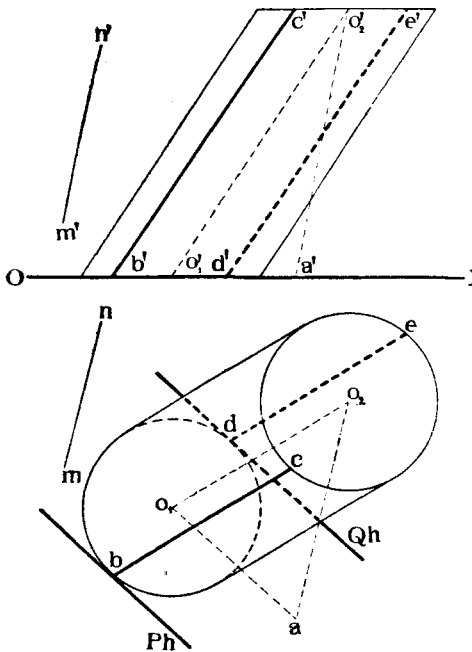
Черт. 407.

Задача въ общемъ случаѣ допускаетъ два рѣшенія.

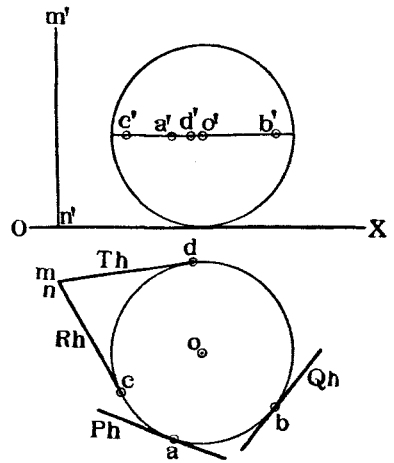
Примѣръ 13-й. Провести плоскость, касательную къ шару и параллельную прямой MN (черт. 409).

Предположимъ, что прямая MN перпендикулярна къ H . Если бы этого не было дано, то, пользуясь методомъ вращенія или переменны плоскостей проекцій, можно было бы заданную систему, шаръ и прямую, привести къ упомянутому, выгодному для рѣшенія задачи, положенію.

Задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Дѣйствительно, всякая плоскость P или Q , перпендикулярная къ H и касательная къ экватору шара будетъ удовлетворять поставленнымъ условіямъ. На чертежѣ



Черт. 408.



Черт. 409.

обозначены плоскости P и Q , перпендикулярныя къ H и касательныя къ шару въ точкахъ A и R .

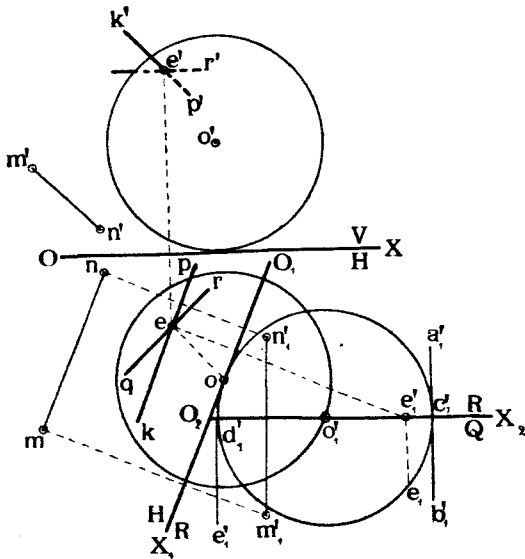
На чертежѣ 410 эта задача рѣшена въ общемъ случаѣ заданія прямой MN .

Переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{R}$, причеиъ R проводимъ черезъ центръ шара параллельно MN и перпендикулярно къ H .

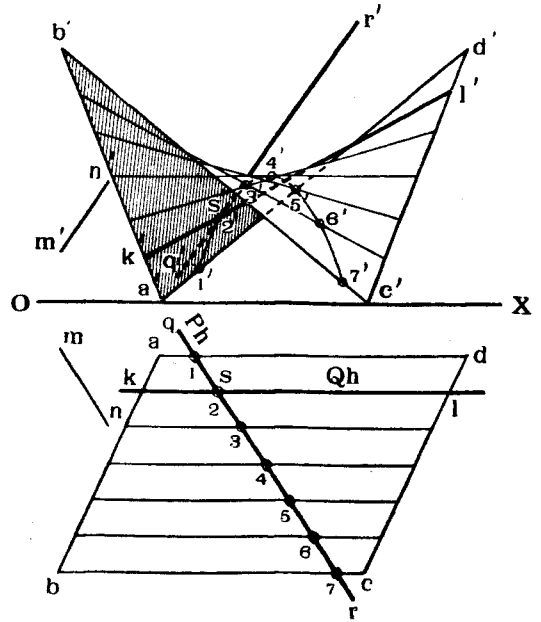
Строимъ проекціи шара и прямой NM на R . Проводимъ линіи $a_1'c_1'b_1'$ и $d_1'e_1'$ касательныя къ проекціи шара на R и параллельныя $n_1'm_1'$. Линія $c_1'd_1'$ будетъ проекціей на R экватора, на которомъ будутъ находиться точки касанія съ шаромъ любыхъ плоскостей, параллельныхъ MN . Задаемъ проекціей e_1' одной изъ такихъ точекъ. Чтобы опредѣлить расстояніе самой точки E до плоскости R , переходимъ къ системѣ

$\frac{R}{Q}$, принимая за плоскость Q плоскость самого экватора CED . Тогда новая горизонтальная проекція точки E будетъ въ мѣстѣ e_1 , и разстояніе точки E отъ плоскости R будетъ равно $e_1 e'_1$.

Теперь остается только найти точку E въ системѣ $\frac{U}{H}$ и провести черезъ нее двѣ линіи, опредѣляющія плоскость, касательную къ шару. На чертежѣ проведена одна изъ такихъ линій $KEP \parallel MN$ и другая $QER \perp$ къ радіусу EO .



Черт. 410.



Черт. 411.

Примѣръ 14-й. Провести плоскость, касательную къ косоу плоскости и параллельную прямой MN (черт. 411).

Для рѣшенія задачи разсѣчемъ косоу плоскость случайной плоскостью P , параллельной MN и перпендикулярной къ H . Построимъ линію сѣченія 1, 2, 3...7 и проведемъ къ послѣдней касательную прямую QR , параллельную MN . Пусть S будетъ точкой касанія.

Тогда плоскость, опредѣляемая прямою QR и производящей KL косоу плоскости, проходящей черезъ точку S , и будетъ удовлетворять поставленнымъ условіямъ.

Задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, такъ какъ можно провести безчисленное множество плоскостей, пересѣкающихъ косоу плоскость и параллельныхъ MN ¹⁾.

¹⁾ Возможно построить плоскости, касательныя къ линейчатымъ неразверзаемымъ и другимъ поверхностямъ, болѣе точно, не пользуясь кривыми линіями подобными кривой 1-7 на черт. 411, однако, для сего необходимо знать нѣкоторыя теоремы изъ высшей геометріи; подробности о семъ см. В. Курдюмовъ. «Курсъ Начертательной Геометріи» Отдѣлъ I, часть II. Стр. 63; теорема Шаля.

f) *Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая через данную линію.*

Рѣшеніе этой задачи въ общемъ случаѣ, при случайномъ заданіи прямой линіи и поверхности, не всегда возможно.

Напримѣръ, для шара эта задача возможна лишь тогда, когда прямая не пересѣкаетъ его поверхности.

На чертежѣ 409 показаны двѣ плоскости R и T , проходящія черезъ прямую MN и касательныя къ шару въ точкахъ C и D .

Для поверхностей цилиндрическихъ эта задача возможна тогда, когда заданная прямая либо параллельна производящимъ цилиндра, либо, при продолженіи, касается цилиндра. На чертежѣ 404 показаны двѣ плоскости P и Q , проходящія черезъ прямую $MN \parallel OO_1$ и касательныя къ цилиндру по производящимъ AA_1 и BB_1 .

Для поверхностей коническихъ эта задача возможна только тогда, когда заданная прямая или проходитъ черезъ вершину конуса, или, при продолженіи, касается конуса.

Напримѣръ, на чертежѣ 405 показаны двѣ плоскости P и Q , проходящія черезъ прямую SM и касательныя къ конусу по производящимъ SA и SB .

Для линейчатыхъ поверхностей эта задача въ общемъ случаѣ возможна. Рѣшеніе задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: вокругъ данной поверхности описывается цилиндръ, производящія котораго были бы параллельны данной прямой. Каждая такая производящая проводится по способу, объясненному для прямой $QR \parallel MN$ (черт. 411). Искомая плоскость будетъ проходить черезъ данную прямую и будетъ касаться упомянутаго обертывающаго цилиндра по нѣкоторой его производящей.

g) *Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной плоскости.*

Рѣшеніе этой задачи возможно не всегда.

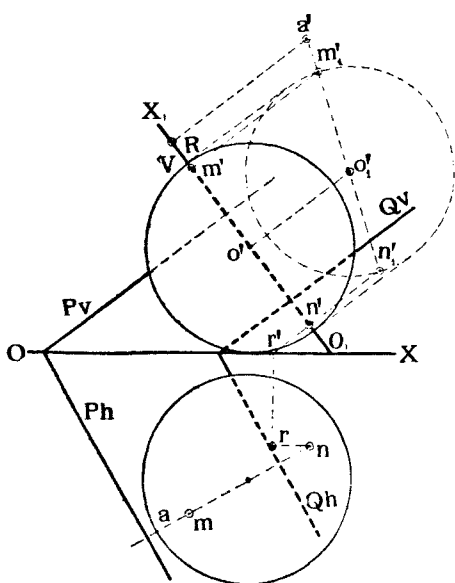
Для цилиндрическихъ поверхностей она рѣшается тогда, когда данная плоскость параллельна оси цилиндра. Для коническихъ поверхностей рѣшеніе задачи возможно, если плоскость заключаетъ въ себѣ линію, параллельную одной какой-нибудь производящей конуса. Для поверхностей вращенія и для линейчатыхъ поверхностей рѣшеніе задачи возможно въ общемъ случаѣ.

При этомъ для проведенія искомой плоскости можно поступить слѣдующимъ образомъ:

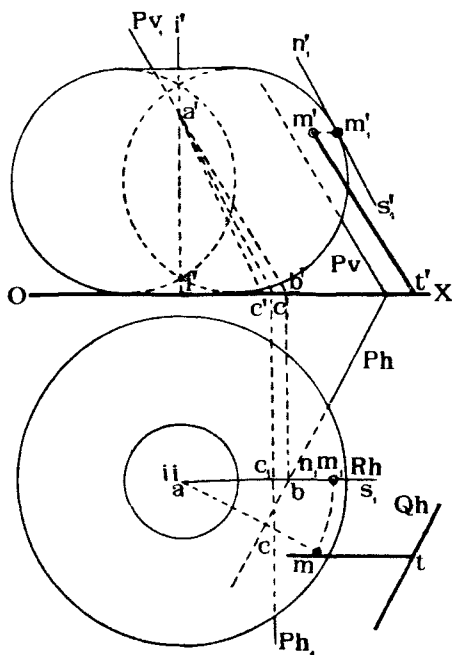
Описать вокругъ данной поверхности какой нибудь обертывающій цилиндръ съ производящими, параллельными какой нибудь линіи, лежащей въ данной плоскости, а затѣмъ провести плоскость, касательную къ упомянутому обертывающему цилиндру. Эта плоскость и будетъ искомой.

Разсмотримъ рѣшеніе этой задачи на примѣрахъ.

Примѣръ 15-й. Провести плоскость, касательную къ шару и параллельную плоскости P (черт. 412).



Черт. 412.



Черт. 413.

Если искомая плоскость Q должна касаться шара и быть параллельной плоскости P , то радиусъ шара, проведенный въ точку касанія будетъ перпендикуляренъ къ плоскостямъ P и Q . Строимъ такой радиусъ, проводя его проекціи $o'n'$ и on перпендикулярными съ соответственнымъ слѣдамъ Pv и Ph . Находимъ, пользуясь методомъ перемѣны плоскостей проекціи, точку N пересѣченія этого радиуса съ шаромъ и проводимъ черезъ эту точку плоскость $Q \parallel P$. Для этого черезъ N проведена линія $NR \parallel Pv$ и черезъ слѣдъ R этой линіи проведена линія $Qh \parallel Ph$.

Далѣе найдена точка схода слѣдовъ плоскости Q и проведена линія $Qv \parallel Pv$.

Примѣръ 16-й. Провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія (тора) и параллельную плоскости P (черт. 413).

Для рѣшенія задачи поворачиваемъ данную поверхность и плоскость

P вокругъ оси II до тѣхъ поръ, пока плоскость P не расположится перпендикулярно къ V . Слѣды ея въ повернутомъ положеніи обозначимъ черезъ Pv_1 и Ph_1 . Построимъ теперь плоскость, касательную къ тору и параллельную повернутой плоскости P .

Для полученія точки касанія проводимъ касательную $n_1's_1' \parallel Pv_1$ и обозначаемъ точку касанія черезъ m_1', m_1 .

Возвращаемъ теперь торъ, плоскость P и точку M въ прежнее положеніе и проводимъ черезъ M плоскость Q , параллельную P .

Для построенія слѣда Qh , черезъ точку M проведена фронталь плоскости Q , параллельная Pv , найденъ слѣдъ T этой фронтали, и черезъ T проведена линія $Qh \parallel Ph$.

h) Нормали къ кривымъ поверхностямъ.

Такъ какъ нормаль въ какой нибудь точкѣ кривой поверхности перпендикулярна къ плоскости, касательной къ поверхности въ той же точкѣ, то различныя задачи на проведеніе нормалей въ данной точкѣ поверхностей на практикѣ сводятся къ задачамъ на проведеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ.

Если мы выберемъ какую нибудь производящую линейчатой поверхности, зададимся на этой производящей рядомъ точекъ и проведемъ черезъ эти точки нормали къ данной поверхности, то совокупность этихъ нормалей будетъ образовывать новую поверхность, называемую *поверхностью нормальной* къ данной поверхности по данной ея производящей.

Разсмотримъ проведеніе нормалей къ поверхности изъ точки M , лежащей внѣ послѣдней.

Для наара таковой нормалью будетъ служить линія, соединяющая центръ наара съ точкою M .

Въ случаѣ цилиндра или конуса, имѣющихъ ось, проводимъ плоскость черезъ точку M и ось данной поверхности, находимъ производящую сѣченія этой плоскости съ поверхностью и изъ точки M опускаемъ на эту производящую перпендикуляръ, который и будетъ искомою нормалью.

Разсмотримъ, какъ рѣшается въ общемъ случаѣ задача въ пространствѣ на приближенное проведеніе изъ точки N , лежащей внѣ поверхности, нормали къ послѣдней (черт. 414).

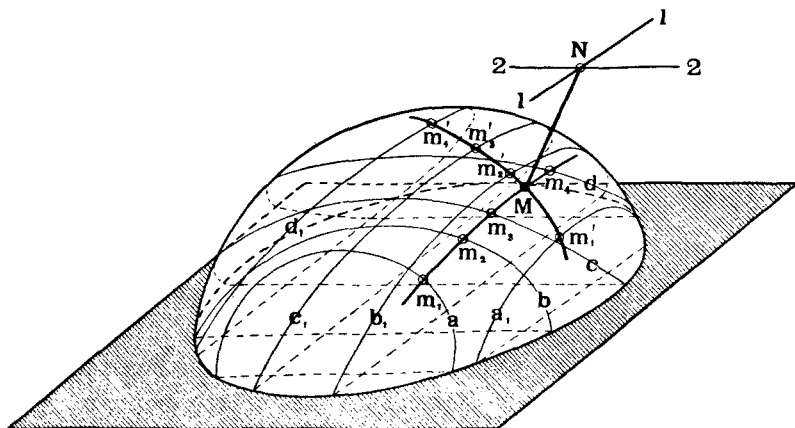
Проведемъ черезъ точку N двѣ случайныхъ линіи 11 и 22 .

Далѣе черезъ каждую изъ этихъ линій проведемъ рядъ плоскостей, сѣкущихъ данную поверхность по кривымъ линіямъ a, b, c, d, \dots и $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$.

Проведемъ изъ точки N нормали къ линіямъ a, b, c, d, \dots такъ, какъ это было показано на черт. 233, и найдемъ точки m, m_2, m_3, m_4, \dots

пересѣченія этихъ нормалей съ линіями a, b, c, d, \dots Соединимъ точки m_1, m_2, m_3, m_4 плавной кривой.

Проведемъ изъ точки N такія же нормали къ кривымъ a_1, b_1, c_1, d_1 и подобнымъ же образомъ найдемъ точки m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 пересѣченія нормалей съ этими кривыми.



Черт. 414.

Точка M пересѣченія кривыхъ m_1m_4 и $m'_1m'_4$ и опредѣлитъ съ точкою N искомую нормаль къ поверхности, такъ какъ линія MN въ точкѣ M будетъ нормальна къ двумъ кривымъ m_1m_4 и $m'_1m'_4$, начерченнымъ на поверхности.

§ 22. Тѣни кривыхъ поверхностей.

а) Общія замѣчанія.

Ранѣе въ § 15 (стр. 131) нами были изложены общія правила о выборѣ направленія лучей свѣта и о построеніи собственныхъ и падающихъ тѣней для тѣлъ, ограниченныхъ плоскими гранями. Распространимъ теперь эти правила на кривыя поверхности.

Пусть въ пространствѣ даны: какое нибудь тѣло M (черт. 415), ограниченное случайною кривою поверхностью, направленіе лучей свѣта PP , и плоскость или кривая поверхность B .

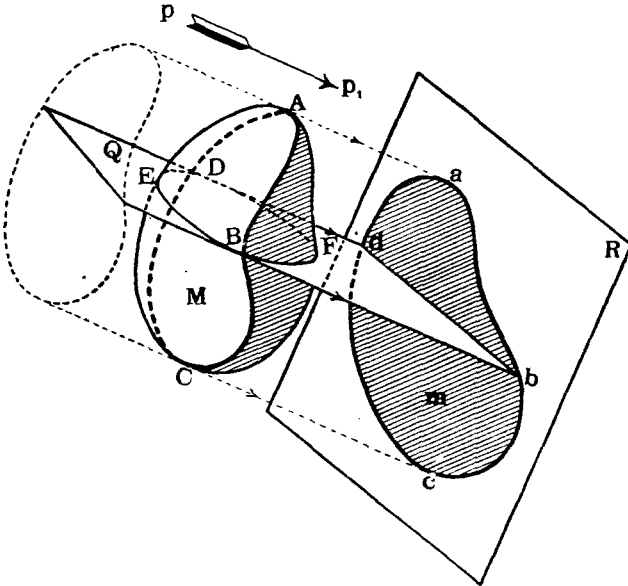
Опишемъ вокругъ тѣла M цилиндръ, касательный къ M , съ производящими, параллельными направленію PP .

Линія $ABCD$ касанія этого цилиндра съ тѣломъ M будетъ служить линіей отдѣла на поверхности M собственной тѣни отъ освѣщенной поверхности. Эту линію называютъ также *контуромъ собственной тѣни*.

Линія $abcd$ сѣченія упомянутого цилиндра съ плоскостью или кри-

вою поверхностью B будет служить контуромъ падающей тѣни отъ тѣла M на поверхность B . Очевидно, контуръ падающей тѣни является тѣнью отъ контура собственной тѣни. Поэтому, при построении собственныхъ и падающихъ тѣней кривыхъ поверхностей, сначала слѣдуетъ находить контуры собственныхъ тѣней, а потомъ уже строить тѣни отъ этихъ контуровъ.

Цилиндръ, обертывающій данную поверхность, можно разсматривать, какъ состоящій изъ ряда производящихъ, параллельныхъ PP' . Пока-



Черт. 415.

жемъ, какъ построить въ пространствѣ одну изъ этихъ производящихъ (черт. 415).

Разсѣчемъ тѣло M плоскостью $Q \parallel PP_1$, и проведемъ линіи Bb и Dd касательныя къ кривой $DFDE$ сѣченія и параллельныя PP_1 .

Линіи Bb и Dd будутъ производящими упомянутаго цилиндра. Точки D и D будутъ принадлежать контуру собственной тѣни, а точки b и d пересѣченія найденныхъ производящихъ съ поверхностью B будутъ принадлежать контуру падающей тѣни. Проводя рядъ плоскостей, подобныхъ Q , и производя описанныя построенія, можно получить рядъ точекъ подобныхъ B, D, b и d .

Соединяя соотвѣтственно эти точки между собою, получимъ въ пространствѣ искомыя контуры тѣней.

Разсмотримъ рѣшеніе задачи на построеніе тѣней въ рядѣ примѣровъ.

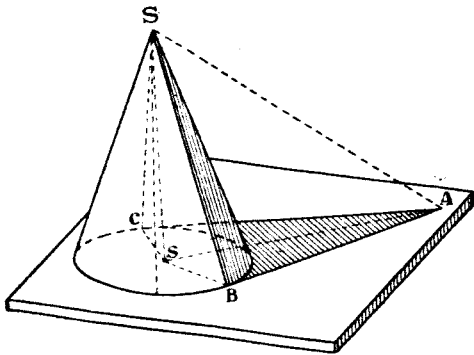
в) *Примѣры построенія тѣней.*

Примѣръ 1-й. Построить собственныя и падающія тѣни прямого круговаго конуса (черт. 416 и 417).

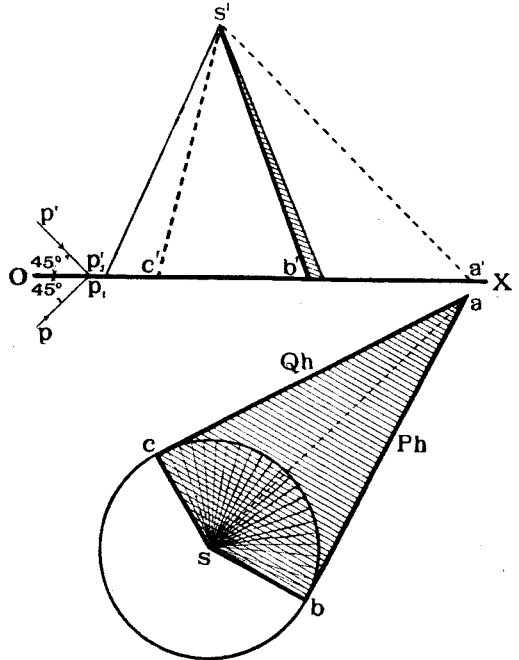
Въ этомъ случаѣ обертывающій цилиндръ превращается въ двѣ плоскости, касательныя къ конусу и параллельныя лучу свѣта.

На черт. 416 показано построение этихъ плоскостей въ пространствѣ, а на чертежѣ 417—въ проекціяхъ.

Производящія SB и SC касанія этихъ плоскостей P и Q съ конусомъ будутъ служить контурами собственной тѣни конуса. Тѣни же отъ



Черт. 416.



Черт. 417.

этихъ линій на H и часть BC круга основанія конуса являются контуромъ падающей тѣни на H .

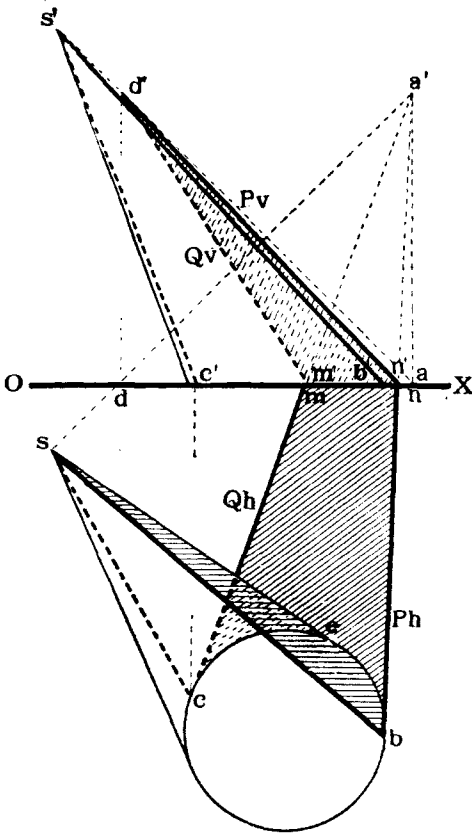
Примѣръ 2-й. Построить собственныя и падающія тѣни наклоннаго конуса, стоящаго на H (черт. 418).

Задача рѣшается такъ же, какъ и предыдущая. Проводимъ плоскости P и Q касательныя къ конусу и параллельныя лучу свѣта. Для этого черезъ вершину S проводимъ лучъ и находимъ его слѣды на H , въ точкѣ A и на V въ точкѣ D . Изъ A проводимъ Ph и Qh касательными къ кругу основанія конуса въ точкахъ B и C .

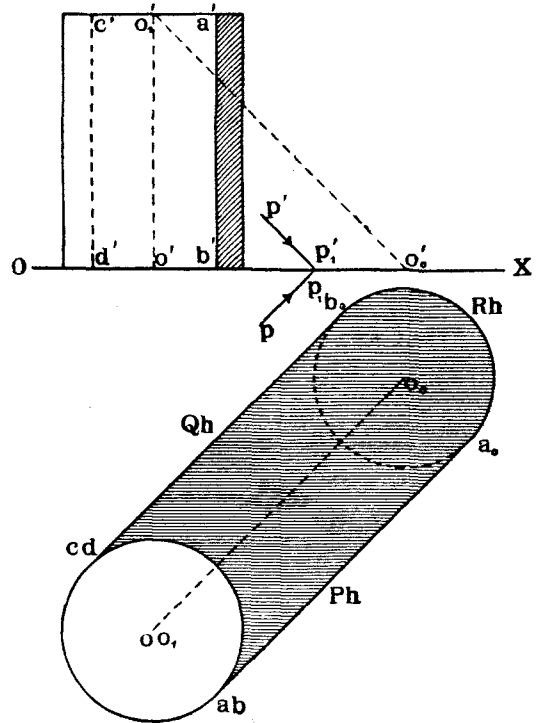
Замѣчаемъ также точки M и N пересѣченія Qh и Ph съ OX . Соединяемъ D съ M и N . Линіи SB и SC и дуга BEC являются контуромъ собственной тѣни конуса; линіи DM , DN и MN служатъ контуромъ падающей тѣни на V , а линіи CM , MN , NB и HEC —контуромъ падающей тѣни на H .

Примѣръ 3-й. Построить собственные и падающія тѣни прямого круговаго цилиндра (черт. 419).

Въ этомъ случаѣ лучевая поверхность, обертывающая данный цилиндръ, состоятъ изъ двухъ плоскостей P и Q , касательныхъ къ цилиндру по производящимъ AB и CD , и изъ цилиндрической поверх-



Черт. 418.



Черт. 419.

ности, производящія которой проходятъ черезъ точки дуги AC круга верхняго основанія.

Свѣченіемъ этого лучевого цилиндра съ H будетъ являться дуга круга a_0b_0 , того же радиуса, что и цилиндръ. Центръ же O_0 этого круга будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія съ H линіи $O_1O_0 \parallel PP_1$.

Нетрудно видѣть, что слѣды Ph и Qh плоскостей касательныхъ къ цилиндру, будутъ касаться круговъ bd и a_0b_0 и будутъ параллельны горизонтальной проекціи pp_1 луча свѣта.

Примѣръ 4-й. Построить тѣни наклоннаго цилиндра (черт. 420).

Большая ось c_1d_1 этого эллипса является какъ бы тѣнью отъ линіи CD , а меньшая a_1b_1 , тѣнью отъ AR .

Подобнымъ же образомъ строится и эллипсъ, контуръ падающей тѣни на V .

Замѣтимъ, что оба эти эллипса пересѣкаются въ точкахъ M и N лежащихъ на оси OX .

Примѣръ 6-й. Построить собственныя и падающія тѣни кольца.

На чертежѣ 422 изображено кольцо, образованное вращеніемъ вертикальнаго круга вокругъ оси $II_1 \perp H$, причеъ ось эта лежитъ въ плоскости круга.

Направленіе луча свѣта $pp_1, p'p'_1$.

Построимъ контуръ собственной тѣни. Нѣсколько точекъ этого контура можно найти, проводя плоскости касательныя къ кольцу, перпендикулярныя къ H или къ V и параллельныя лучу.

Такимъ способомъ найдены точки A, R, C, D, N, H, V и $З$, при чемъ первыя четыре лежатъ въ плоскости параллельной V и проходящей черезъ ось кольца. Опредѣляются онѣ на V проведеніемъ линій касательныхъ къ кругамъ контура кольца и параллельныхъ $p'p'_1$.

Вторыя четыре точки опредѣляются на H проведеніемъ линій, касательныхъ къ контуру кольца и параллельныхъ pp_1 . Лежатъ эти точки на экваторахъ кольца.

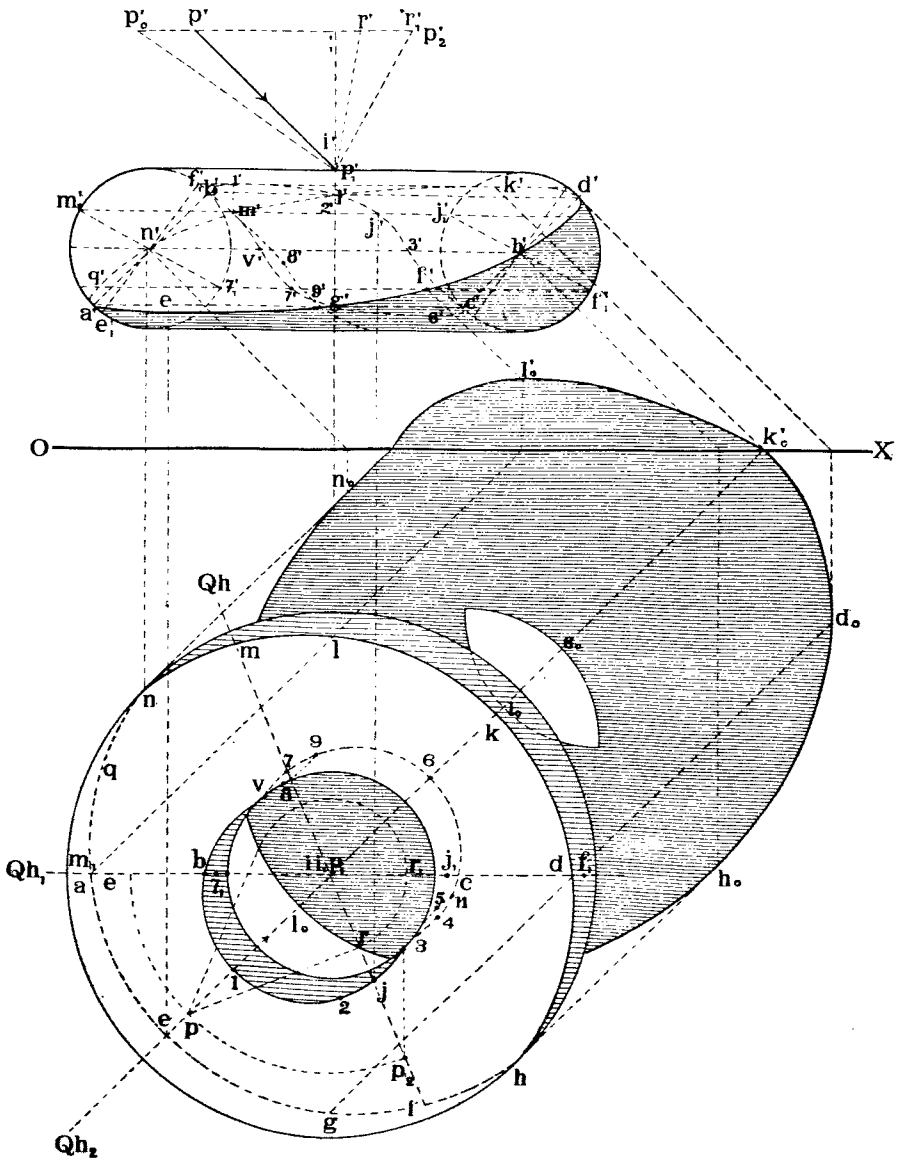
Покажемъ построеніе случайныхъ точекъ контура собственной тѣни кольца.

Проведемъ черезъ ось кольца случайную плоскость Q . Спроектируемъ лучъ PP_1 на эту плоскость въ линію $RP_1 (rp_1, r'p'_1)$. Повернемъ Q вокругъ II_1 въ положеніе Q_1 , параллельное V . Тогда линія RP_1 займетъ положеніе $R_1P_1 (r'_1p'_1, r_1p_1)$, а крути сѣченія плоскости Q съ кольцомъ совпадутъ съ меридональными кругами кольца, параллельными плоскости V . Проводимъ теперь на V линіи, параллельныя $r'_1p'_1$ и касательныя къ кругамъ въ точкахъ m'_1, γ'_1, j'_1 и f'_1 . Находимъ горизонтальныя проекціи этихъ точекъ на линіи Qh_1 и поворачиваемъ плоскость Q съ найденными точками въ прежнее положеніе. Тогда точки придутъ въ мѣста M, T, J и F .

Вмѣсто того, чтобы строить проекцію RP_1 луча PP_1 на плоскость Q , можно было бы вмѣстѣ съ плоскостью Q повернуть самый лучъ PP_1 вокругъ оси II_1 на тотъ же уголъ въ томъ же направленіи. Очевидно, послѣ поворота вертикальная проекція $p_2'p'_1$ должна совпасть съ $r_1'p'_1$.

Продолжая построенія, подобныя тѣмъ, которыя были сдѣланы для нахождения точекъ M, T, J и F , можно найти еще рядъ точекъ. Соединяя послѣднія плавными кривыми, получимъ контуръ собственной тѣни кольца. Замѣтимъ, что для полученія наивысшихъ и наинижнихъ

точекъ этого контура слѣдуетъ проводить плоскость Q_2 черезъ лучь PP_1 . Въ этой плоскости получаются точки E , 1, 6 и K .



Черт. 422.

Контуръ падающей тѣни на H и V получится, какъ тѣнь отъ контура собственной тѣни кольца.

Замѣтимъ, что часть контура собственной тѣни у горла кольца даетъ падающую тѣнь на нижнюю часть самого кольца у горла его.

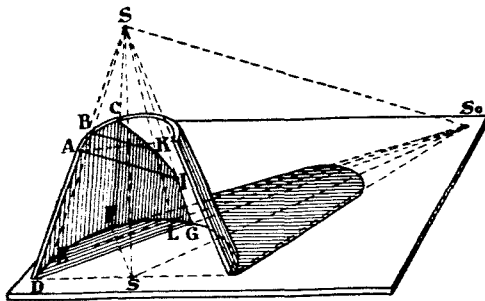
Контуръ этой падающей тѣни на самое кольцо показанъ на чертежѣ пунктирными линиями **V 8, 9** и **35, 11**. Линіи эти строятся по точкамъ пересѣченія съ поверхностью кольца лучей, проходящихъ черезъ точки контура собственной тѣни **VD** и **2J3**.

Въ настоящемъ примѣрѣ было въ общихъ чертахъ сказано о построеніи тѣней падающихъ отъ тѣла на само себя (линіи **V 8, 9** и **35, 11**, чертежъ 422). Разсмотримъ теперь этотъ вопросъ на примѣрахъ нѣсколько подробнѣе, хотя по существу онъ не представляетъ новой задачи.

Примѣръ № 7. Построить собственныя и падающія тѣни половины усѣченного полаго конуса (черт. 423). Ограничимся рѣшеніемъ этой за-

дачи въ пространствѣ, предлагая читателю рѣшить ее самому въ проекціяхъ, руководствуясь слѣдующимъ примѣромъ 8-мъ рѣшенія аналогичной задачи.

Продолжаемъ производящія внутренней поверхности конуса до пересѣченія въ вершинѣ S . Проводимъ черезъ S лучъ и находимъ его слѣдъ S_0 на плоскости основанія конуса. Соединяемъ точки S_0 и D .



Черт. 423.

Линія DG будетъ тѣнью, падающей отъ производящей AD на H . Соединяемъ точки S и G и проведемъ черезъ A лучъ до пересѣченія съ SG въ точкѣ I . Линія IG будетъ тѣнью, падающей отъ производящей AD на внутреннюю поверхность конуса. Далѣе, изъ точки S_0 проводимъ линію S_0F , касательную къ внутреннему полукругу основанія въ точкѣ F . Соединяемъ F съ S и находимъ точку C , пересѣченія FS съ верхнимъ внутреннимъ полукругомъ. Точка C будетъ служить началомъ тѣни, падающей отъ дуги AC на внутреннюю поверхность конуса. Построимъ тѣнь отъ какойнибудь точки H этой дуги. Проводимъ производящую SBE . Соединяемъ E съ S_0 и замѣчаемъ точку L пересѣченія ES_0 съ внутреннимъ полукругомъ основанія. Искомая тѣнь опредѣлится въ точкѣ K пересѣченія луча HK съ производящей SL . Остальныя точки кривой CKI строятся подобнымъ же образомъ.

Контуръ тѣни, падающей отъ конуса на H , будетъ строиться по общимъ правиламъ, рассмотрѣннымъ въ предыдущихъ примѣрахъ.

Примѣръ 8-й. Построить собственныя и падающія тѣни половины полаго конуса, стоящаго вершиною на H (черт. 424).

Построимъ сначала контуръ собственной тѣни на внутренней поверхности конуса. Проведемъ изъ вершины S внутренней поверхности конуса

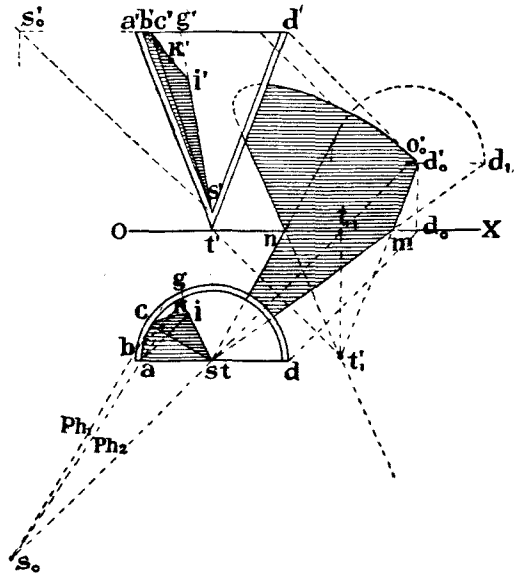
лучь и найдемъ его пересѣченіе S_0 съ плоскостью основанія конуса. Изъ S_0 проводимъ касательную Ph_1 къ внутреннему полукругу въ точкѣ C и соединяемъ C съ S . Линія CS и будетъ контуръ собственной тѣни внутренней поверхности конуса. Построимъ теперь тѣнь, падающую на ту же поверхность отъ производящей AS . Соединяемъ точки A и S_0 прямою Ph_2 , которая будетъ представлять слѣдъ на плоскости основанія конуса плоскости P , проходящей черезъ лучъ SS_0 и точку A .

Найдемъ точку G пересѣченія Ph_2 съ внутреннимъ полукругомъ и соединимъ G съ S . Тѣнь отъ A на поверхности конуса будетъ въ точкѣ I пересѣченія луча AI съ производящей GS .

Линія же IS будетъ служить тѣнью отъ AS на внутреннюю поверхность конуса. Построимъ теперь тѣнь, падающую на ту же поверхность отъ дуги ABC внутреннего полукруга.

Тѣнь K отъ любой точки B этой дуги строится такъ же, какъ и отъ точки A . Построивъ рядъ точекъ падающей тѣни, соединимъ ихъ плавной кривою SKI .

Тѣни, падающія отъ конуса на V и H строятся по общимъ правиламъ (см. примѣръ 2-й, стр. 268). На чертежѣ показаны эти построения, объяснить которыя представляемъ читателю.



Черт. 424.

Примѣръ 9-й. Построить тѣни въ нишѣ (черт. 425).

Въ этомъ примѣрѣ рѣшеніе задачи заключается въ нахожденіи точекъ пересѣченія лучей, проходящихъ черезъ прямое AJ и круговое $АН$ ребра ниша съ внутренними ея поверхностями: цилиндрическою $АНІJ$ и сферическою — $АЕН$.

Найдемъ сначала тѣнь, падающую на цилиндръ отъ ребра AJ . Для этого проводимъ черезъ AJ плоскость P_1 и строимъ линію сѣченія ея съ H и съ цилиндромъ. Тѣнью отъ AJ будутъ линіи $j1$ и $1'a_0'$. Далѣе строимъ тѣнь на цилиндръ отъ кругового ребра $АЕН$ ниши. Выбираемъ на этомъ ребрѣ рядъ точекъ B, C, \dots , проводимъ черезъ нихъ лучи и находимъ пересѣченіе ихъ b_0', c_0' и т. д. съ цилиндромъ. Кривая линія $a_0', b_0', c_0', d_0' \dots$ и будетъ тѣнью отъ дуги $ABCD$ круга на цилиндръ. Начн-

бравъ $R \perp H$ и $\parallel PP_1$. Проведемъ лучъ черезъ E и черезъ этотъ лучъ проведемъ плоскость $P_s \perp V$, которая въ пространствѣ пересѣчетъ шаръ по кругу радиуса $e'k'$; спроектируемъ шаръ, лучъ E и упомянутый кругъ на плоскость R . (На R показаны проекціи лишь половины шара и круга, необходимыя для рѣшенія задачи). Точка e_{01}' пересѣченія луча $e_1'e_{01}'$ съ дугою круга $e_1'e_{01}'$ и будетъ искомою. Переносимъ ее въ систему \bar{H} .

Подобнымъ же образомъ можно найти еще рядъ точекъ, соединивъ которыя плавной кривой, получимъ контуръ $d_0'f'$ падающей тѣни на шаровую поверхность.

Предоставляемъ читателю доказать, что кривая $d_0'f'$ будетъ дугою эллипса съ осью $g'f'$ ¹⁾.

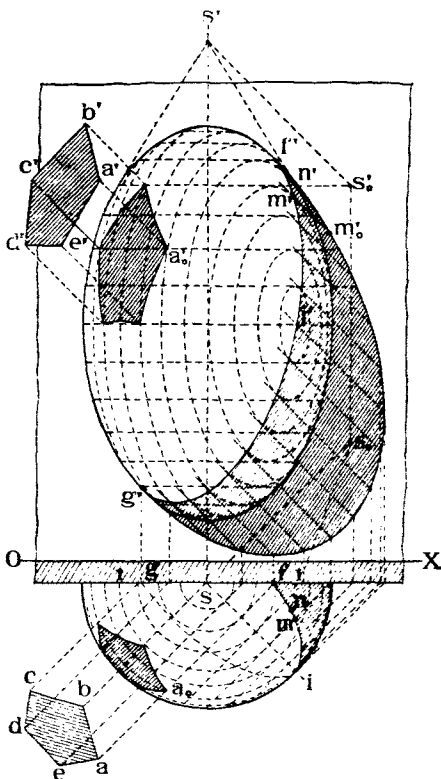
Примѣръ 10-й. Построить собственной и падающія тѣни половины эллипсоида, а также тѣни, падающія на него отъ плоскаго пятиугольника $ABCDE$ (черт. 426).

Для рѣшенія этой задачи воспользуемся общимъ способомъ, описаннымъ на стр. 266 (черт. 415).

Построимъ сначала тѣни самого эллипсоида. Начальныя точки его собственной тѣни будутъ въ точкахъ F' и G' касанія его съ плоскостями, параллельными лучу свѣта и перпендикулярными къ V .

Далѣе, контуръ собственной тѣни долженъ проходить черезъ точку I' касанія эллипсоида съ плоскостью $\perp H$ и \parallel лучу свѣта. Для построенія остальныхъ точекъ контура собственной тѣни слѣдуетъ проводить плоскости, пересѣкающія эллипсоидъ и $\perp H$, находить линіи (эллипсы) ихъ пересѣченія съ эллипсоидомъ и строить прямыя линіи, касательныя къ найденнымъ эллипсамъ.

Полученныя точки соединяемъ плавной кривой $FMIG$, которая и будетъ контуромъ собственной тѣни. Тѣнь отъ этого контура на плоскость



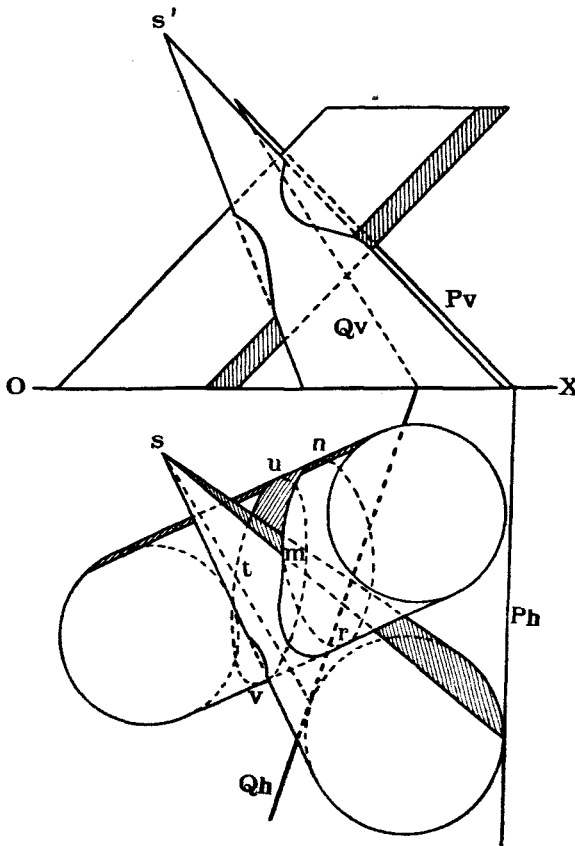
Черт. 426.

¹⁾ Доказательство слѣдуетъ изъ того, что проекціей этого эллипса на R будетъ прямая $d_{01}'e_{01}'$.

На черт. 312 показана часть ниши съ тѣнями.

стѣны, къ которой прислоненъ эллипсоидъ, будетъ служить вонтуромъ падающей тѣни.

Для нахождения точекъ контура собственной тѣни можно было бы воспользоваться еще и другимъ способомъ, именно, проводя по разнымъ параллелямъ эллипсоида соприкасающіяся коническія, а по экватору, цилиндрическую, поверхности.



Черт. 427.

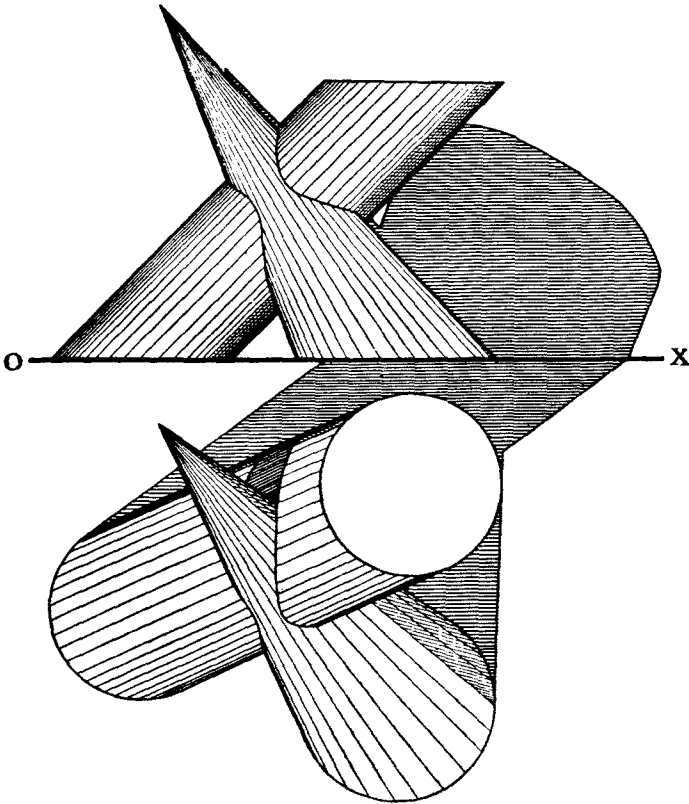
Такая коническая поверхность съ вершиной S проведена для нахождения точки N . Черезъ вершину S проведенъ лучъ до пересѣченія съ плоскостью взятой параллели въ точкѣ S_0 . Изъ S_0 проведена касательная къ параллели ll въ точкѣ N , которая и будетъ искомой.

Тѣнь, падающая на эллипсоидъ отъ пятиугольника $ABCDE$ строится слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ вершины и рядъ точекъ контура пятиугольника плоскости $\perp H$ и находимъ эллипсы ихъ пересѣченія съ эллипсоидомъ.

Тогда точки пересѣченія этихъ эллипсовъ съ соответствующими лучами будутъ принадлежать контуру тѣни, падающей на эллипсоидъ.

Примѣръ 11-й. Построить тѣни, падающія отъ конуса на цилиндръ (черт. 427).

Цилиндръ и конусъ нами взяты тѣ же, для которыхъ ранѣе были построены линіи сѣченія (черт. 367 и 368) и собственныя и падающія на V и H тѣни (черт. 418 и 420).

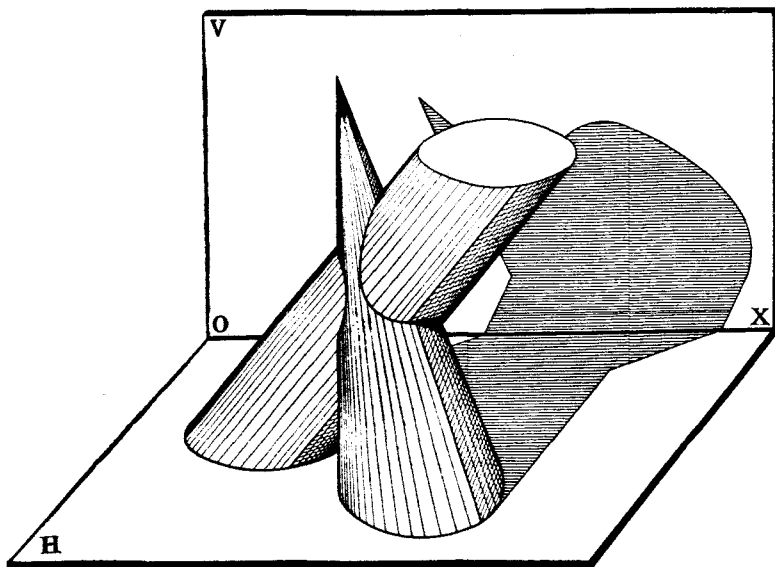


Черт. 428.

Чтобы построить тѣни, падающія отъ конуса на цилиндръ, слѣдуетъ найти линіи сѣченія цилиндра съ двумя плоскостями P и Q , касательными къ конусу и параллельными лучамъ свѣта. Таковыми линіями являются эллипсы mnr и twv . Видимая въ проекціи на H часть тѣни, падающей отъ конуса на цилиндръ, заштрихована.

На черт. 428 показанъ общій видъ пересѣкающихся конуса и цилиндра съ тѣнями. Чертежъ этотъ составленъ изъ чертежей... 418, 420 и 427).

На черт. 429 изображены модели плоскостей проекцій и пересѣкающихся поверхностей, причемъ послѣднія склеены по разверткамъ конуса и цилиндра (черт. 387 и 388) и освѣщены лучами свѣта, параллельными принятому направленію.



Черт. 429.

Кромѣ разобранныхъ примѣровъ, на чертежахъ 259, 260, 269, 298, 315, 324, 325, 326, 327, 335, 338, 339 показанъ еще рядъ изображеній различныхъ поверхностей съ тѣнями.

Читателю предлагается самому, въ видѣ упражненія, возстановить построения для получения контуровъ этихъ тѣней.

Задача № 31.

Построить собственныя и падающія тѣни вазы (черт. 430).

Рѣшеніе.

Заданное тѣло состоитъ изъ ряда отдѣльныхъ поверхностей, вторыя на чертѣ обозначены римскими цифрами I—X. Всю задачу можно раздѣлить на рядъ отдѣльныхъ задачъ, каковыя слѣдуетъ рѣшать отдѣльно.

Сначала опредѣляемъ собственныя тѣни цилиндровъ I и VII такъ, какъ это было объяснено на стр. 269 (черт. 419). Далѣе строимъ собственныя тѣни кольцевыхъ поверхностей II и VIII, какъ это было объяснено на стр. 272 (черт. 422). Затѣмъ строимъ собственную тѣнь на поверхности IV такъ, какъ было объяснено на стр. 277 (черт. 426) и на стр. 272 (черт. 422).

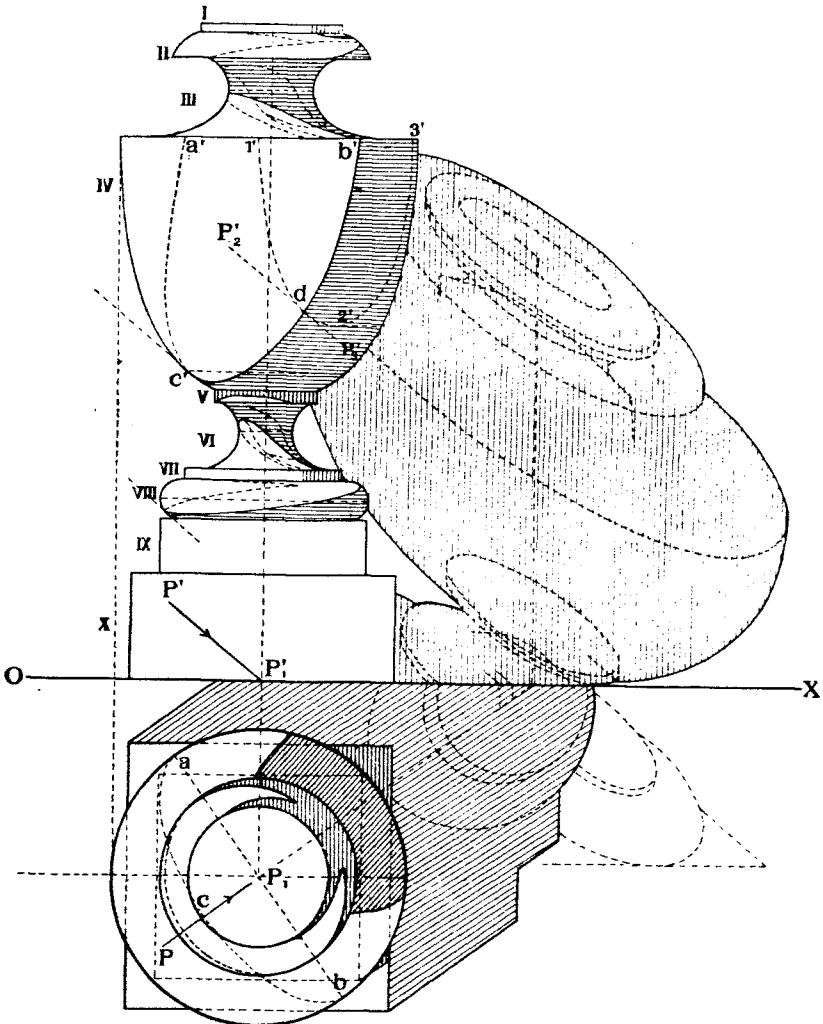
Далѣе строимъ тѣни, падающія отъ основанія кольца II на поверхность вращенія III и отъ основанія цилиндра V на поверхность VI такъ, какъ это было показано на стр. 277 (черт. 426), гдѣ была построена тѣнь отъ пятиугольника на эллипсоидѣ.

Наконѣцъ строишь тѣнь, падающую отъ поверхности IV на цилиндръ V.

Построивъ контуры всѣхъ собственныхъ тѣней, строишь контуръ падающей тѣни на V и H, какъ тѣнь отъ контура собственной тѣни.

Задача № 32.

Построить собственныя и падающія тѣни капители тосканской полуколонны (черт. 431), прислоненной къ стѣнѣ.



Черт. 430.

Рѣшеніе.

Поверхность данной колонны можно расчленить на рядъ отдѣльныхъ поверхностей, обозначенныхъ на чертежѣ римскими цифрами I—VIII.

Планъ рѣшенія задачи будетъ заключаться въ слѣдующемъ:

1. Построеніе собственныхъ тѣней каждой поверхности.
2. Построеніе падающихъ тѣней отъ одной поверхности на другую.

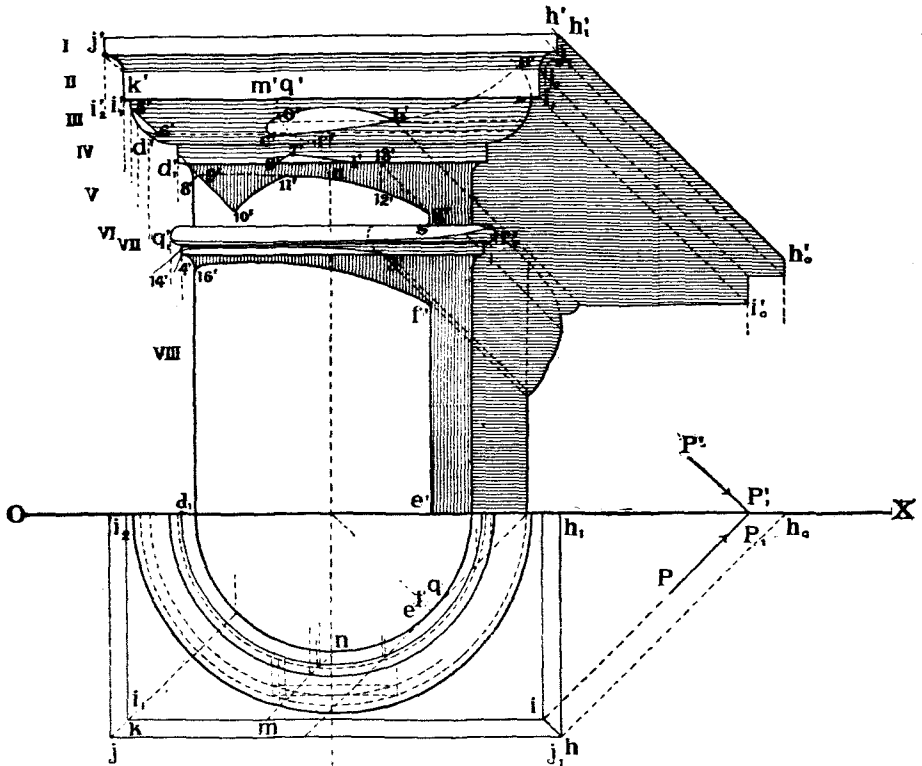
3. Построение тѣней, падающих на *V* и *H*.

Построение тѣней для каждой из восьми поверхностей производится согласно ранѣ объясненнымъ примѣровъ.

Скажемъ лишь нѣсколько словъ о томъ, какъ строится тѣнь, падающая отъ какой нибудь точки *M* ребра поверхности II на поверхность III.

Проводимъ черезъ *M* плоскость $\perp V$ и \parallel дугу PP_1 .

Строимъ кривую *MR* (вертикальная проекція ея $m'r'$) сѣченія этой плоскости съ поверхностью III и замѣчаемъ точку *O* пересѣченія дуга *MN* съ этой кривой. Точка *O* и будетъ искоюю тѣнью.



Черт. 431.

На чертежѣ показаны слѣдующіе контуры собственныхъ тѣней:

Поверхности.

Контуры.

I	$HH_1, HJ_1, J_1J.$
II	$LI, I_1, I_1I_2.$
III	$ABCD.$
IV	12 и часть дуги у точки $D_1.$
V	$GS.$
VI	$R_1Q_1.$
VII	$34.$
VIII	$EF.$

Контуръ тѣней, падающихъ на поверхность колонны:

Контуръ падающихъ тѣней.

Контуръ собственныхъ тѣней,
отъ которыхъ падаютъ тѣнь.

<i>KL</i>	<i>JJ₁</i> .
<i>5 6</i>	<i>I₁I₂</i> .
<i>COB</i>	<i>II₁</i> .
<i>27</i>	<i>II₁</i> .
<i>71</i>	<i>CB</i> .
<i>89</i>	<i>CD</i> .
<i>9, 10</i>	<i>II₁</i> .
<i>10, 11</i>	<i>II₁</i> .
<i>11, 12</i>	<i>2, 1.</i>
<i>12, G</i>	<i>1, 13.</i>
<i>14, 3</i>	<i>Q₁ R₁</i> .
<i>16, F</i>	<i>4, 3.</i>

Наконецъ, на *V* построены тѣни, падающія отъ контуровъ собственныхъ тѣней колонны.

с) *Элементы физической теоріи тѣней.*

Въ началѣ этого параграфа а также въ § 15 мы рассматривали построение собственныхъ и падающихъ тѣней исключительно съ геометрической точки зрѣнія не касаясь физической стороны явленія. Съ этой точки зрѣнія рѣшеніе задачи сводилось къ нахожденію линій касанія данныхъ поверхностей съ цилиндрическими поверхностями, обертывающими ихъ и параллельными лучамъ свѣта. Эти линіи служили контурами собственныхъ тѣней.

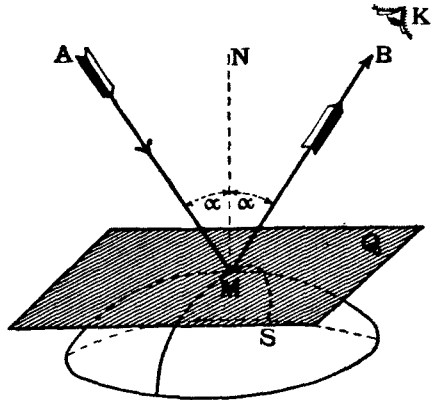
Построеніе же контуровъ падающихъ тѣней сводилось къ задачѣ на построеніе линій свѣченія поверхностей.

Такая постановка задачи является достаточной при исполненіи обыкновенныхъ техническихъ чертежей, въ которыхъ тѣни придаютъ большую наглядность изображенія.

При исполненіи же художественныхъ чертежей фасадовъ зданій, деталей художественной обработки комнатъ и т. п., иногда приходится прибѣгать къ оттѣненію и растушевкѣ поверхностей, изображая ихъ тѣни такими, какими онѣ бываютъ въ дѣйствительности, или какими онѣ кажутся глазу.

Оттѣненія эти часто изображаются на глаза, вавъ это дѣлаютъ художники при рисованіи съ натуры.

Изложимъ нѣкоторые элементы физической теоріи тѣней ¹⁾.



Черт. 432.

¹⁾ Подробности см. 1) Н. Рынинъ «Дневной свѣтъ» СПб. 1908 г.
 2) A. Giller «Lehrbuch der Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde». Stuttgart.
 3) H. Goodwin «Architectural shades and shadows». Boston. 1904.
 4) J. Adhémar «Ombres». Paris. 1874. 4-me ed.
 5) А. Редеръ «Теорія тѣней». СПб. 1858.

1. Лучъ AM , падающій въ какой-нибудь точкѣ M (черт. 432) на поверхность S , и лучъ MB отраженный лежатъ въ одной плоскости съ нормалью MN къ поверхности въ этой точкѣ.

2. Уголъ α паденія равенъ углу α отраженія.

3. Освѣщенность (e) данной точки поверхности пропорціональна косинусу угла α паденія и обратно пропорціональна квадратамъ разстоянія R освѣщенной точки отъ источника свѣта. Если обозначить силу источника свѣта черезъ J , то освѣщенность точки M выразится формулой:

$$e = \frac{J}{R^2} \cos \alpha \dots \dots \dots (1)$$

Освѣщенность эта измѣняется въ направленіи нормали MN къ поверхности и называется *дѣйствительной освѣщенностью* точки M .

На чертежахъ обыкновенно и изображаютъ тѣни соответственно дѣйствительной освѣщенности разныхъ точекъ поверхностей.

На картинахъ же изображаютъ не дѣйствительную а *кажущуюся освѣщенность* точекъ, т. е. такую, каковою освѣщенность точки кажется наблюдателю.

Предположимъ, что въ точкѣ K , находящейся отъ точки M въ разстояніи r , помѣщенъ глазъ наблюдателя K .

Если поверхность S полированная, то лучъ AM , отразившись по направленію MB , не попадетъ въ глазъ K , и наблюдателю будетъ казаться, что поверхность S не освѣщена.

Если же поверхность матовая или шероховатая, то лучъ, попадая въ точку M , разсѣется по разнымъ направленіямъ, причемъ часть силы свѣта поглотится поверхностью, а разсѣется нѣкоторая доля e_1 падающаго свѣта, причемъ

$$e_1 = ke.$$

Величина k называется коэффициентомъ разсѣянія, и она всегда меньше единицы.

Лучъ, попадающій въ глазъ K , будетъ имѣть силу

$$e_2 = \frac{e_1}{r^2} = \frac{ke}{r^2} = \frac{k \cdot J \cdot \cos \alpha}{R^2 \cdot r^2} \dots \dots \dots (2)$$

Такимъ образомъ точка M , имѣющая дѣйствительную освѣщенность e , будетъ казаться глазу K освѣщенности $e_1 = ke < e$.

Кромѣ того, въ зависимости отъ состоянія атмосферы между глазомъ и точкой M , эта освѣщенность можетъ казаться еще меньше.

Точки поверхности, обладающіе наибольшей дѣйствительной освѣщенностью, могутъ казаться менѣ освѣщенными, нежели другія, и наоборотъ.

Вопросы кажущейся освѣщенности мы предполагаемъ изложить въ курсѣ перспективы.

Здѣсь же мы разсмотримъ лишь вопросы, относящіеся къ дѣйствительной освѣщенности.

При освѣщеніи небольшой поверхности параллельными лучами солнечнаго свѣта можно предположить, что всѣ лучи подходятъ къ поверхности съ одинаковою силою J . Тогда въ формулѣ I-й исключится вліяніе R , и она приметъ видъ:

$$e = J \cos \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Если мы опредѣлимъ освѣщенность разныхъ точекъ поверхности, то можно соединить между собою плавными кривыми линиями точки, имѣющую одинаковую освѣщенность.

Такія линіи называются *линіями равной освѣщенности (изоботы)*.

На черт. 433, изображенъ разрѣзъ шара плоскостью T , проходящая через его центръ и параллельная лучу PP_1 . Линіи равной освѣщенности шара спроектируются на плоскость T въ линіи $ab, cd, \dots \perp PP_1$. Углы паденія лучей по этимъ линіямъ на шарѣ будутъ равны угламъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, 90^\circ$ между радиусами шара ob, od, \dots и лучами, проходящими через точки b, d , и т. д.

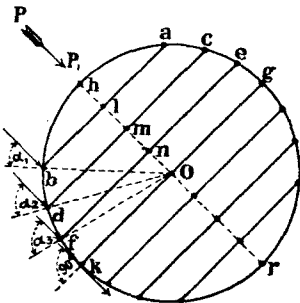
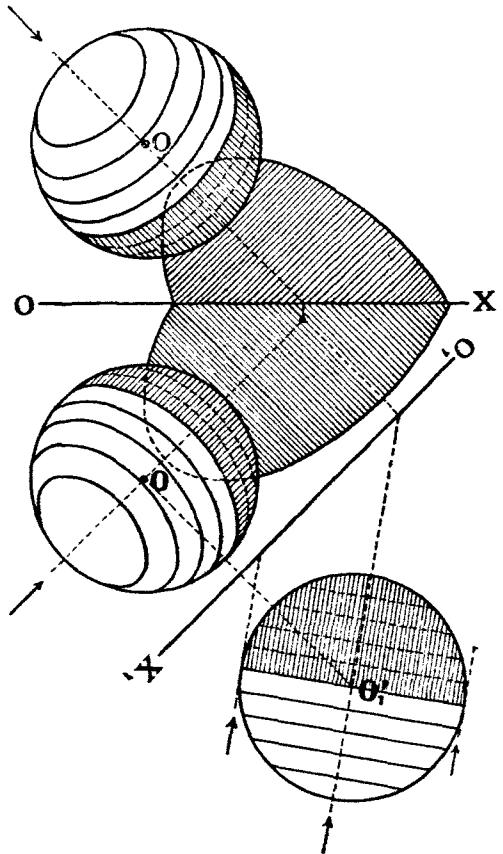
Освѣщенности точекъ h, b, d, \dots будутъ равны

h	J .
b	$J \cos \alpha_1$
d	$J \cos \alpha_2$.
k	$J \cos 90^\circ = 0$.

На черт. 434 показаны проекціи шара съ изображеніями линій равной освѣщенности.

Если съади шара находится какая нибудь плоскость пли поверхность, отражающая свѣтъ съ коэффициентомъ разсѣянія k , то задняя часть шара также будетъ освѣщена, хотя гораздо слабѣе, чѣмъ передняя, приблизительно на величину k . Можно для задней части построить линіи равной освѣщенности.

Если неосвѣщенные части шара покрывать краской опредѣленной густоты, освѣщенные — совсѣмъ не закрашивать, а остальные части закрашивать тонами густоты пропорціональной ихъ освѣщенности, то проекціи шара изображаетъ, какъ это показано на черт. 435.



Черт. 433.

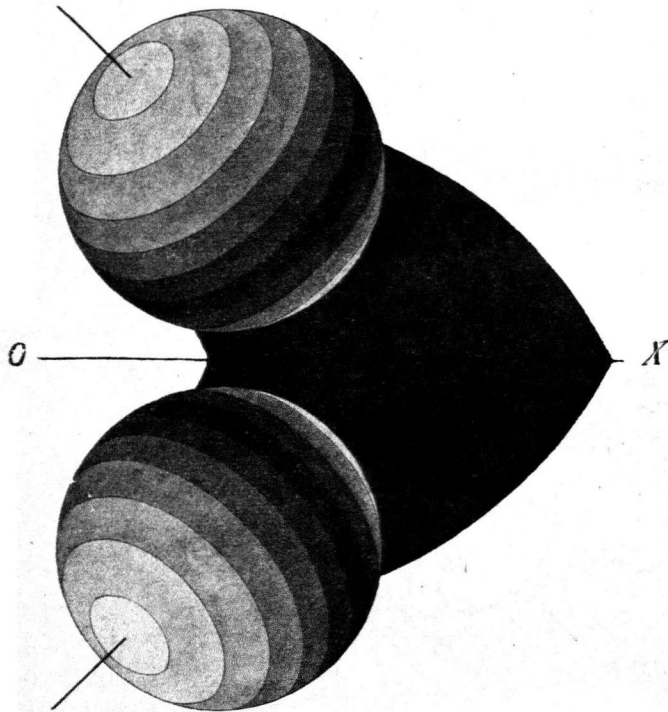
Черт. 434.

Линіи равной освѣщенности замѣнены площадками равной освѣщенности, что соответствуетъ замѣнѣ шара вписаннымъ въ него многогранникомъ, составленнымъ изъ ряда коническихъ поверхностей, ось которыхъ проходитъ черезъ центръ шара и параллельна лучу, а основаниями которыхъ служатъ линіи равныхъ освѣщенностей.

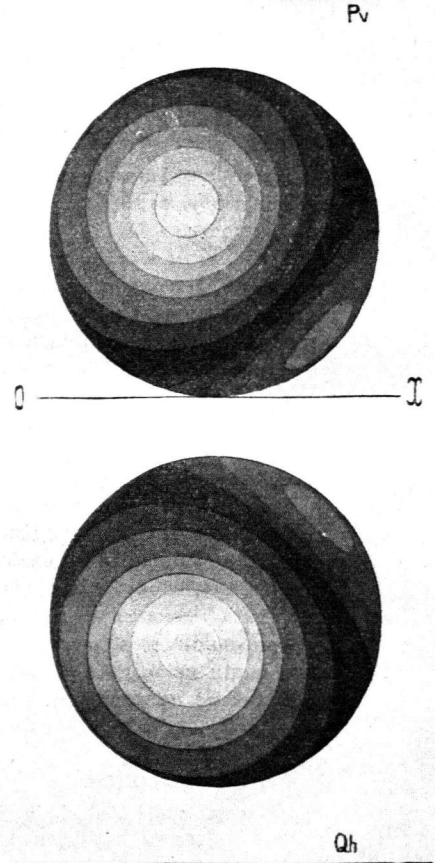
При этомъ предполагается, что плоскости V и H отражаютъ свѣтъ.

На чертежѣ 310 показанъ общій видъ шаръ съ линіями равной освѣщенности.

На черт. 436 тотъ же шаръ изображенъ съ показаніемъ линіи видимой, а не дѣйствительной, освѣщенности. Линіи эти построены въ предположеніи, что шаръ разсматривается изъ точекъ зрѣнія, расположенныхъ въ плоскости P для проекціи на H или въ плоскости Q для проекціи на V . Видимая или кажущаяся освѣщен-



Черт. 435.



Черт. 436.

ность каждой точки шара опредѣлялась по формулѣ (2-й), гдѣ r будетъ выражать разстоянія точекъ шара до плоскостей P или Q ; отраженные отъ шара лучи всѣ предполагаются перпендикулярными къ P или къ Q . Чѣмъ дальше плоскости P и Q , въ которыхъ предполагаются расположенными точки зрѣнія, будутъ удалены отъ шара, тѣмъ больше кажущаяся освѣщенность его будетъ приближаться къ дѣйствительной.

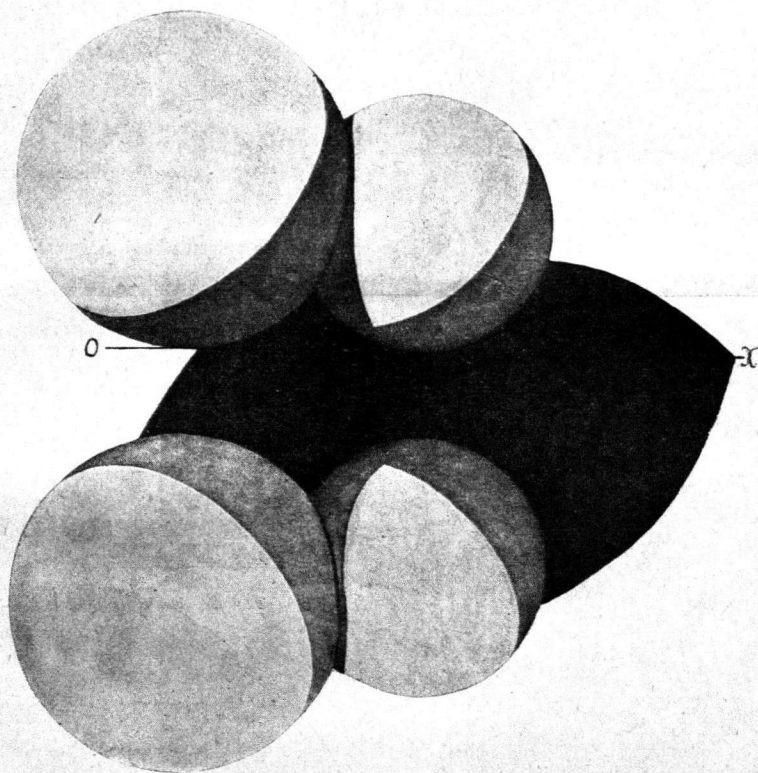
На черт. 437, для сравненія съ чертежами 435 и 436, изображены два шара съ показаніемъ собственныхъ и падающихъ тѣней, построенныхъ согласно правилъ, изложенныхъ въ § 22 (b), не принимая во вниманія физической стороны явленія.

Если дана поверхность случайнаго вида, то для построенія линіи равной освѣщенности слѣдуетъ въ разныхъ точкахъ ея проводить нормали къ ней и опредѣлять углы между этими нормальми и направленіями лучей свѣта.

Соединяя между собой точки, у которыхъ эти углы одинаковы, мы и получимъ линіи равныхъ освѣщенностей.

На чертежахъ 283, 310, 320, 323, 331, 334, 340 приведенъ рядъ примѣровъ съ изображеніями линій равной освѣщенности для различныхъ поверхностей, причемъ площадки между каждой парой таковыхъ линій закрашены однимъ и тѣмъ же соответственнымъ тономъ.

На черт. 438 изображены база и капитель колонны съ показаніемъ линій равной освѣщенности и съ закраской поверхностей разными тонами по поясамъ равной освѣщенности безъ отмывки и тушеванія.



Черт. 437.

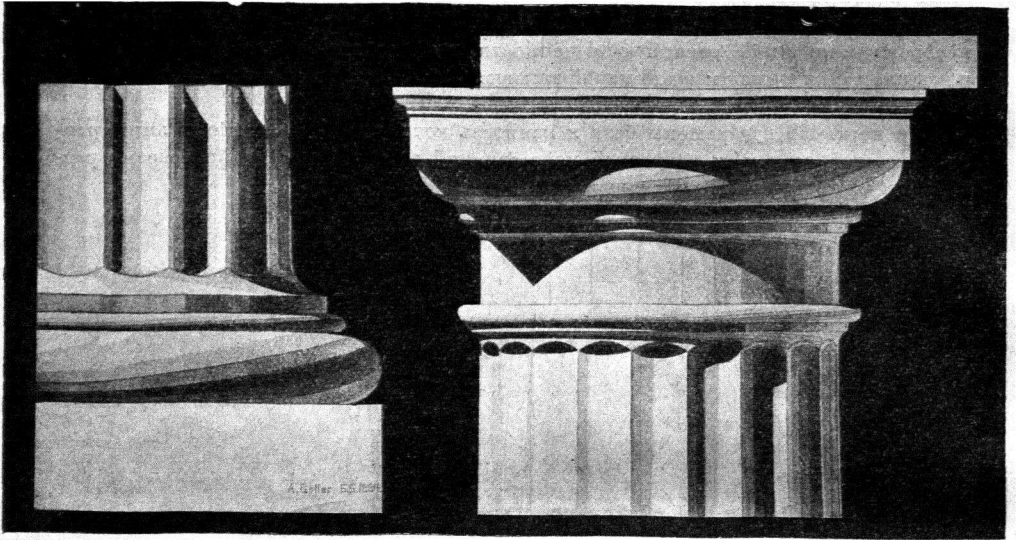
При рисованіи карандашемъ или при отмывкѣ чертежа кистью представляется возможнымъ сгладить границы между поясами разной освѣщенности, дѣлая тушевку или отмывку тѣней.

На чертежѣ 439 изображенъ шаръ съ оттушевкой его тѣней.

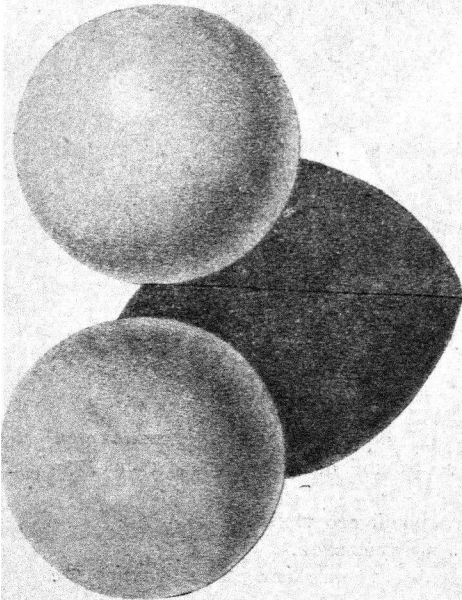
На черт. 440 изображено кольцо съ такою же тушевкой.

На черт. 441 изображены два цилиндрическихъ пересѣкающихся флянца въ фасадѣ и въ разрьѣ.

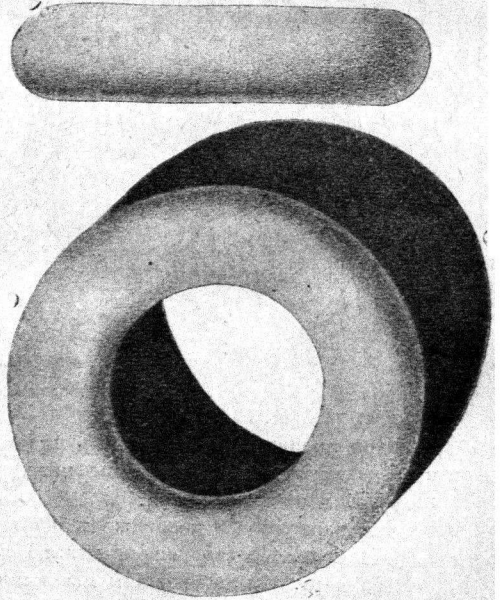
На чертежахъ 442 и 443 показаны собственные и падающія тѣни для капители и базы колоннъ Ионическаго (черт. 442) и Коринтскаго (черт. 443) ордеровъ. Изображенія эти были получены при помощи фотографированія моделей, освѣщен-



Черт. 438.



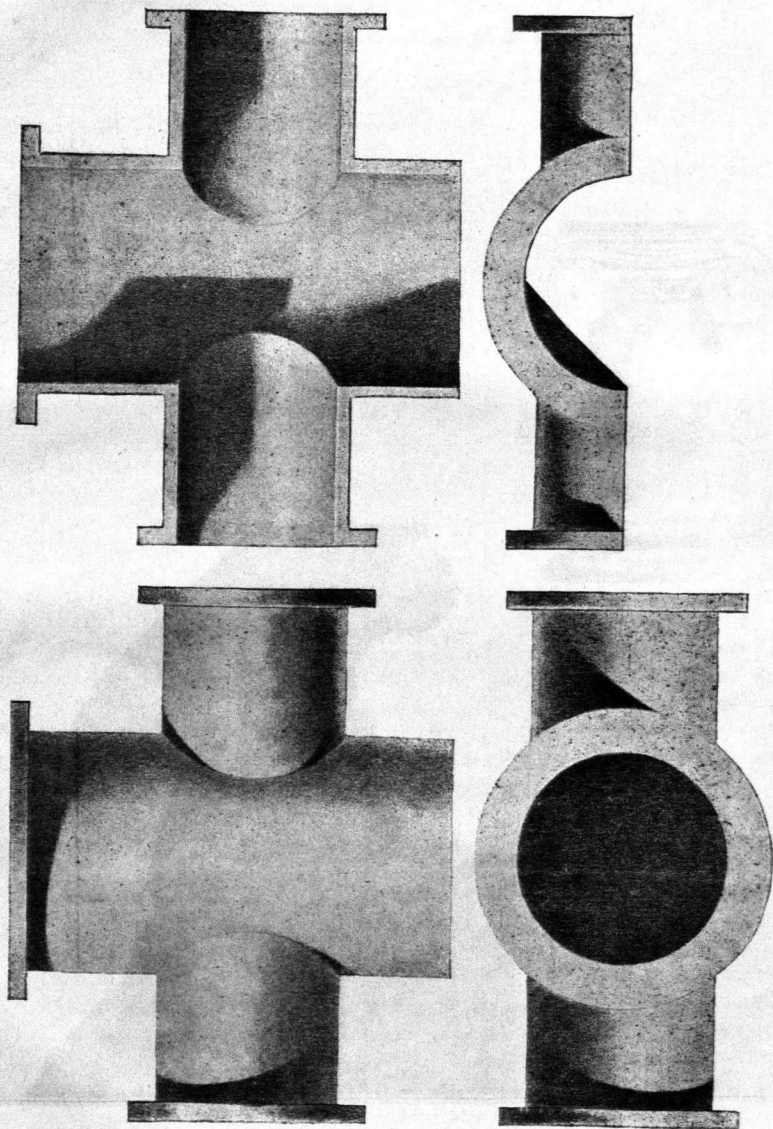
Черт. 439.



Черт. 440.

ныхъ лучами солнца, параллельными принятому ихъ направленію относительно плоскостей проекціи.

Заканчивая этотъ параграфъ, упомянемъ еще о такъ называемыхъ *блестящихъ точкахъ и линіяхъ*, которыя наблюдаются на хорошо полированныхъ поверхностяхъ,



Черт. 441.

Блестящей точкой на полированной поверхности называется такая точка, въ которой падающій лучъ свѣта и лучъ, отраженный къ глазу наблюдателя, составляютъ одинаковые углы съ нормалью къ поверхности въ данной точкѣ. *Блестящей линіей* поверхности называется геометрическое мѣсто блестящихъ точекъ ея.



Черт. 442.



Черт. 443.

При построении блестящих точек и линий полированных поверхностей в ортогональных проекциях слѣдуетъ имѣть въ виду, что эти точки и линии будутъ разными соотвѣтственно направленію лучей зрѣнія перпендикулярно къ V или перпендикулярно къ H . Въ первомъ случаѣ отраженные лучи должны идти $\perp V$, а во второмъ $\perp H$.

§ 23. Геометрическія мѣста.

Геометрическимъ мѣстомъ называется геометрическая система, элементы которой удовлетворяютъ одному или нѣсколькимъ опредѣленнымъ геометрическимъ условіямъ.

Разсмотримъ простѣйшія геометрическія мѣста.

Прямая линия есть геометрическое мѣсто точекъ, которыя могутъ удовлетворять извѣстнымъ геометрическимъ условіямъ, напримѣръ, биссектрисса угла есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ его сторонъ. Перпендикуляръ, восстановленный къ прямолинейному отрѣзку въ серединѣ послѣдняго, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ этого отрѣзка, и т. д.

Плоскость можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто или точекъ, или прямыхъ линий, удовлетворяющихъ цѣлому ряду условій. Напримѣръ, плоскость P , параллельная плоскости Q и удаленная отъ послѣдней на разстояніи a , есть: 1) геометрическое мѣсто точекъ, удаленныхъ отъ плоскости Q на разстояніе a , 2) геометрическое мѣсто прямыхъ линий, параллельныхъ Q и удаленныхъ отъ Q на разстояніе o .

Плоскость, перпендикулярная къ нѣкоторому отрѣзку прямой линіи AB и проведенная черезъ середину AB , есть геометрическое мѣсто: 1) точекъ, равноудаленныхъ отъ концовъ A и B отрѣзка или 2) линий, перпендикулярныхъ къ данному отрѣзку и т. д.

Шаръ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ данной точки, центра шара. Всякая плоскость, касательная къ шару, будетъ удалена отъ центра его на одно и то же разстояніе, равное радіусу шара.

Прямой круговой цилиндръ есть геометрическое мѣсто: 1) точекъ, удаленныхъ отъ данной прямой, оси цилиндра, на данное разстояніе, 2) прямыхъ линий, параллельныхъ данной—оси цилиндра и удаленныхъ отъ нея на данное разстояніе.

Всякая плоскость, касательная къ такому цилиндру, будетъ удалена отъ оси его на одно и то же разстояніе, равное радіусу цилиндра, и будетъ параллельна оси цилиндра или линіямъ, параллельнымъ этой оси.

Прямой круговой конусъ есть геометрическое мѣсто прямыхъ линий, наклоненныхъ къ данной линіи, оси конуса, подъ даннымъ угломъ α . Въ частности, если мы проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси конуса, то его поверхность будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линий, наклоненныхъ подъ даннымъ угломъ $90^\circ - \alpha$ къ данной плоскости.

Всякая плоскость, касательная къ такому конусу, будетъ наклонена къ оси его или къ линіямъ, параллельнымъ этой оси, подъ угломъ α . Въ то же время всякая такая касательная плоскость будетъ наклонена къ плоскости, перпендикулярной къ оси конуса, подъ угломъ $90^\circ - \alpha$.

Въ зависимости отъ числа и характера условій, опредѣляющихъ различные геометрическіе элементы, послѣдніе можно разсматривать, какъ результаты построеній, произведенныхъ сочетаніями различныхъ геометрическихъ мѣстъ, каждое изъ которыхъ удовлетворяетъ одному изъ заданныхъ условій.

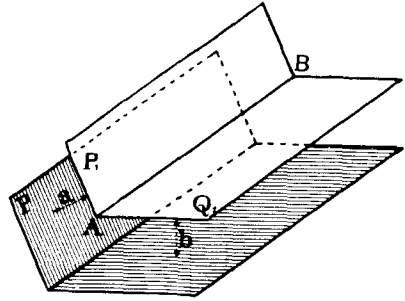
Въ виду разнообразія и многочисленности комбинацій геометрическихъ мѣстъ, разсмотримъ лишь нѣкоторыя изъ нихъ на примѣрахъ рѣшенія задачъ, причемъ

послѣднія будемъ рѣшать сначала въ пространствѣ, а потомъ укажемъ планъ рѣшенія ихъ въ проекціяхъ.

Задача № 33. Даны двѣ плоскости P и Q . Требуется провести линію, параллельную имъ и въ разстояніи a отъ P и b отъ Q (черт. 444).

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ. Проводимъ плоскость P_1 , параллельную P въ разстояніи a отъ нея. Эта плоскость будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прамыхъ линій, удовлетворяющихъ одному изъ заданныхъ условий.

Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1 , параллельную Q , на разстояніи b отъ нея. Всякая прямая, лежащая въ этой плоскости, будетъ удовлетворять второму изъ заданныхъ условий. Очевидно, линія AB пересѣченія плоскостей P_1 и Q_1 будетъ искомою линіей, удовлетворяющей обоимъ заданнымъ условиямъ.

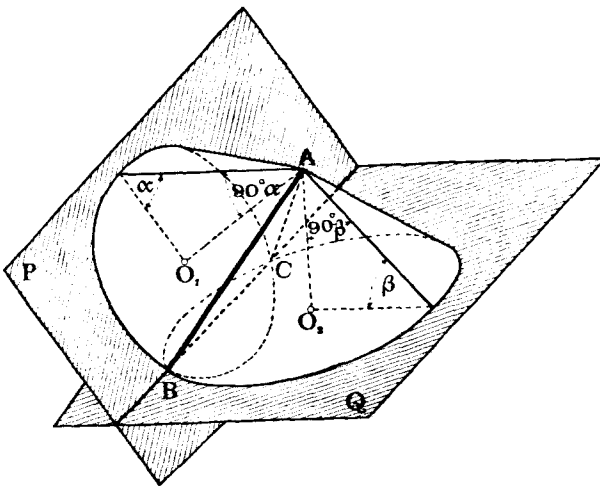


Черт. 444.

Рѣшеніе задачи въ проекціяхъ будутъ заключаться въ слѣдующемъ:

- 1) Проводимъ плоскость P_1 , параллельную P на разстояніи a отъ нея. Для этого:
 - а) задаемъ въ плоскости P какой нибудь точкою M ,

- б) возстаиваемъ въ точкѣ M перпендикуляръ къ плоскости P ,
- в) откладываемъ на этомъ перпендикулярѣ отъ точки M отрѣзокъ $MN = a$,
- г) проводимъ черезъ точку N двѣ кавихъ нибудь линіи NK и NL , параллель-



Черт. 445.

ныя плоскости P , напримѣръ, параллельныя слѣдамъ Pv и Ph плоскости P . Линіи NK и NL и опредѣляютъ искомую плоскость P_1 .

2) Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1 , параллельную плоскости Q въ разстояніи b отъ нея.

3) Находимъ линіи сѣченія плоскостей P_1 и Q_1 .

Исслѣдованіе задачи будетъ заключаться въ опредѣленіи числа рѣшеній. Въ

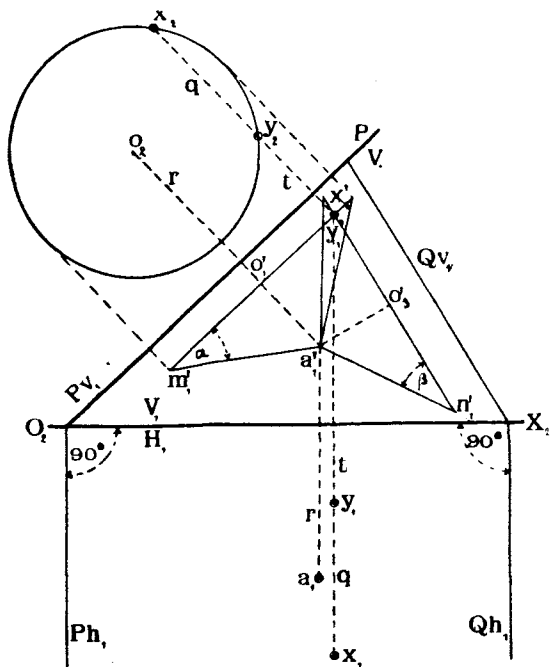
данномъ случаѣ, очевидно, будетъ четыре рѣшенія, въ зависимости отъ того, съ какой стороны данныхъ плоскостей мы будемъ проводить плоскости P_1 и Q_1 .

Задача № 34. Провести черезъ данную точку A прямую линію подъ угломъ α къ данной плоскости P и подъ угломъ β къ данной плоскости Q (черт. 445).

Рѣшеніе задачи съ пространствъ.

Изъ точки A опускаемъ перпендикуляры AO_1 и AO_2 на плоскости P и Q .

Принимая эти перпендикуляры за оси конусовъ съ вершиною въ A , описываемъ вокругъ нихъ эти конуса, одинъ вокругъ оси AO_1 съ угломъ между осью и производящими $90^\circ - \alpha$ и другой вокругъ оси AO_2 съ угломъ $90^\circ - \beta$. Очевидно, линіи AB и AC сѣченія поверхностей этихъ конусовъ будутъ удовлетворять обоимъ заданнымъ условіямъ.



Черт. 446.

Рѣшенія задачи въ проекціяхъ.

Если плоскости P и Q заданы случайно, то прежде всего, при помощи методовъ вращенія или перемѣны плоскостей проекцій, переходимъ къ наиболее выгодному ихъ заданію, на примѣръ, къ такому, при которомъ линія ихъ сѣченія перпендикулярна къ новой плоскости проекцій (черт. 446) и находимъ въ этой системѣ V_1 проекція точки A (a'_1). Строимъ проекціи на V_1 двухъ вышеупомянутыхъ конусовъ, имѣя въ виду, что углы наклона ихъ производящихъ отдѣла къ плоскостямъ P и Q спроектируются на V_1 безъ искаженія. Выбираемъ высоты AO_1 и AO_2 этихъ конусовъ такъ, чтобы длины производящихъ обоихъ конусовъ были равны между собою, т. е. чтобы

$$a'_1 m'_1 = a'_1 n'_1.$$

Основанія этихъ конусовъ спроектируются на V_1 въ видѣ линій, перпендикулярныхъ соответственно къ $a'_1 o'_3$ и $a'_1 o'_1$.

Линія пересѣченія этихъ основаній спроектируется на V_1 въ видѣ точки. Обозначимъ точки пересѣченія этой линіи съ поверхностями конусовъ черезъ X и Y . Проекція этихъ точекъ на V_1 будутъ точки $x'y'$.

Найдемъ проекціи ихъ на H . Перейдемъ отъ системы $\frac{V_1}{H_1}$ къ системѣ $\frac{V_1}{P}$ и найдемъ проекціи круга основанія конуса съ осью AO_1 на P . Провода изъ точки x'_1 перпендикуляръ x'_1x_2 къ P_{e1} , найдемъ точки x_2 и y_2 пересѣченія его съ новой проекціей круга. Эти точки опредѣлятъ намъ разстояніе искомымъ горизонтальныхъ проекцій точекъ X и Y до оси O_2X_2 . Опускаемъ теперь изъ точки $x'_1y'_1$ перпендикуляръ на O_2X_2 и откладываемъ внизъ отъ оси O_2X_2 полученныя разстоянія q и t . Находимъ точки x_1 и y_1 . Линіи $AХ$ ($a_1x_1, a'_1x'_1$) и $AУ$ ($a_1y_1, a'_1y'_1$) и будутъ искомыми. Теперь остается только перейти отъ системы плоскостей проекціи $\frac{V_1}{H_1}$ къ заданной системѣ $\frac{V}{H}$.

Задача № 35.

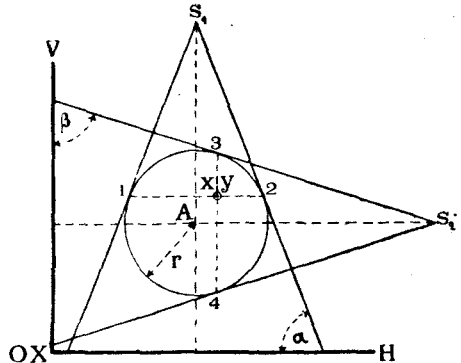
Провести плоскость на данномъ разстояніи r отъ данной точки A , подъ угломъ α къ H и подъ угломъ β къ V .

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Всякая плоскость, касательная къ шару радіуса r съ центромъ въ точкѣ A , будетъ удовлетворять первому условию.

Проведемъ черезъ центръ шара профильную плоскость и примемъ ее за плоскость чертежа (черт. 447). Опустимъ изъ центра шара перпендикуляръ S_1A на плоскость H и примемъ его за ось конуса, производящія котораго были бы наклонены къ H подъ угломъ α и который касался бы шара.

Подобнымъ же образомъ опишемъ конусъ вокругъ шара, но съ осью перпендикулярной къ V и съ производящими, наклоненными къ V подъ угломъ β . Всякая плоскость, касательная къ первому конусу, будетъ удовлетворять двумъ условиямъ:



Черт. 447.

1) она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе r ,

2) она будетъ наклонена къ H подъ угломъ α .

Всякая плоскость, касательная ко второму конусу, будетъ удовлетворять также двумъ условиямъ:

1) она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе r ,

2) она будетъ наклонена къ V подъ угломъ β .

Очевидно, плоскость, одновременно касающаяся двухъ конусовъ, будетъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условиямъ.

Опредѣлимъ эту плоскость.

Она должна заключать въ себѣ вершины обоихъ конусовъ, т. е. проходить черезъ линію S_1S_2 . Слѣдъ плоскости на H долженъ проходить черезъ горизонтальный слѣдъ линіи S_1S_2 ; а такъ какъ эта плоскость должна касаться конуса, стоящаго на H , то горизонтальный слѣдъ искомой плоскости долженъ касаться горизонтальнаго слѣда этого конуса. Двѣ линіи: S_1S_2 и найденный горизонтальный слѣдъ плоскости вполнѣ опредѣляютъ искомую плоскость.

Эту плоскость можно было бы опредѣлить еще и слѣдующимъ образомъ:

Найдемъ круги 1, 2 и 3, 4 касанія обонхъ конусовъ съ шаромъ и опредѣлимъ

точки X и Y пересѣченія этихъ круговъ. Каждая изъ этихъ точекъ съ линіей S_1S_2 опредѣлитъ по плоскости, удовлетворяющей заданнымъ условіямъ.

Задача № 36.

Провести черезъ данную точку A прямую линію на данномъ разстояніи r отъ данной прямой линіи MN и подѣ даннымъ угломъ къ другой прямой PQ .

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ (черт. 448).

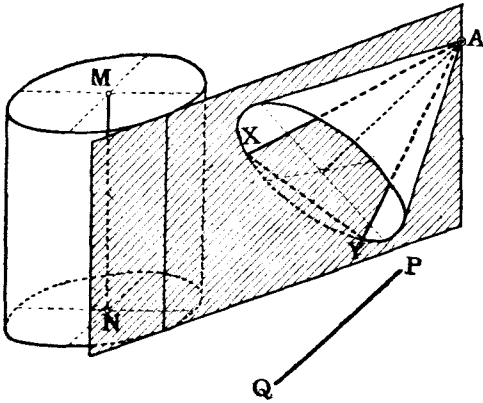
Описываемъ вокругъ линіи MN цилиндръ радіуса r . Черезъ точку A проводимъ плоскость, касательную къ этому цилиндру. Всякая линія, проходящая черезъ точку A въ этой плоскости удовлетворяетъ двумъ условіямъ:

- 1) она проходитъ черезъ точку A ,
- 2) она проходитъ на данномъ разстояніи отъ линіи MN .

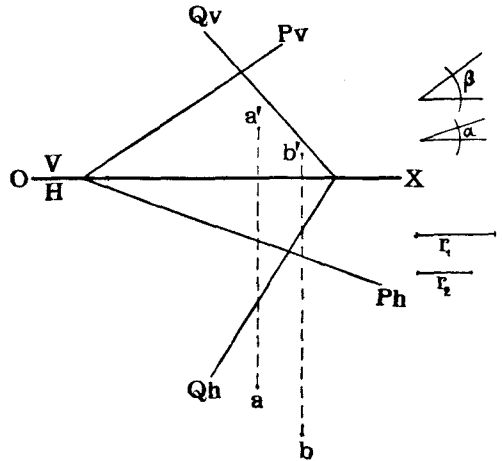
Проводимъ теперь черезъ точку A линію, параллельную линіи PQ и описываемъ вокругъ нея, какъ вокругъ оси, конусъ съ вершиною въ точкѣ A и съ угломъ между производящими и осью равнымъ α .

Находимъ линіи сѣченія AX и AY этого конуса съ ранѣе проведенною плоскостью. Эти линіи, очевидно, будутъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условіямъ, т. е.:

- 1) онѣ проходятъ черезъ точку A ;



Черт. 448.



Черт. 449.

2) онѣ проходятъ на данномъ разстояніи r отъ линіи MN , такъ какъ лежатъ въ плоскости, касательной къ цилиндру съ осью MN ;

3) онѣ наклонены подѣ даннымъ угломъ α къ оси конуса, а слѣдовательно, и къ линіи PQ , такъ какъ лежатъ на поверхности конуса, всѣ производящія котораго наклонены къ линіи PQ подѣ угломъ α .

Задача № 37. Провести черезъ точку A плоскость подѣ угломъ α къ H и подѣ угломъ β къ V .

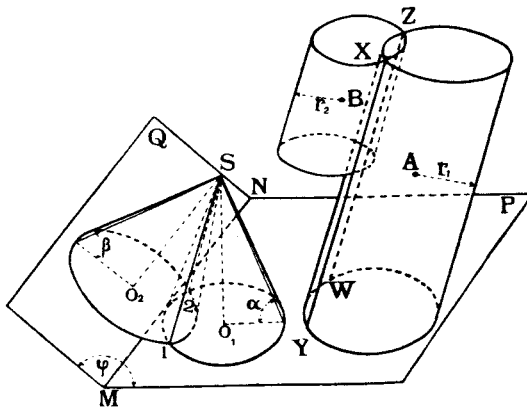
Задача рѣшается подобно задачѣ № 35. Сначала проводимъ плоскость на какомъ нибудь произвольномъ разстояніи α отъ точки A , а потомъ проводимъ черезъ точку A плоскость ей параллельную.

Прослѣдимъ, болѣе подробно, рѣшеніе еще одной задачи.

Задача № 38. Даны: двѣ плоскости P и Q , двѣ точки A и B , два угла α и β и два отрѣзка r_1 и r_2 (черт. 449). Требуется: провести линію подѣ угломъ α къ плоскости P , подѣ угломъ β къ плоскости Q , на разстояніи r_1 отъ точки A и на разстояніи r_2 отъ точки B .

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ. Искомая линія, которую обозначимъ черезъ XY ,

должна, согласно заданію, одновременно удовлетворять четыремъ условіямъ. Разсмотримъ тѣ геометрическія мѣста, которымъ должна принадлежать искомая линия. Зададимся въ пространствѣ случайной точкой S (черт. 450) и примемъ послѣднюю за вершину двухъ конусовъ, изъ которыхъ одинъ SO_1 стоялъ бы на P и имѣлъ бы производящія наклонныя къ P подъ угломъ α , а другой— SO_2 стоялъ бы на Q и имѣлъ бы производящія наклонныя къ Q подъ угломъ β . Очевидно, что совокупность производящихъ конуса SO_1 представляютъ изъ себя геометрическое мѣсто прямыхъ линий, наклоненныхъ къ O подъ угломъ α , а совокупность производящихъ конуса SO_2 представляютъ изъ себя геометрическое мѣсто прямыхъ, наклоненныхъ къ Q подъ угломъ β . Линіи $S1$ и $S2$ сѣченія обоихъ геометрическихъ мѣстъ будутъ одновременно удовлетворять двумъ заданнымъ условіямъ, т. е. будутъ наклонены подъ угломъ α къ P и подъ угломъ β къ Q . Опишемъ теперь вокругъ точекъ A и B два цилиндра, оси которыхъ были бы параллельны, напримѣръ, одной изъ



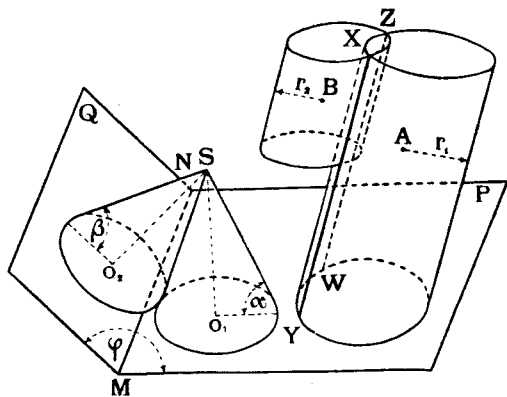
Черт. 450.

найденныхъ линій $S1$, и проходили бы черезъ точки A и B . Радиусъ цилиндра A пусть будетъ равенъ отрезку r_1 , а радиусъ цилиндра B —отрезку r_2 . Очевидно, что линіи сѣченія цилиндровъ будутъ удовлетворять всѣмъ четыремъ заданнымъ условіямъ.

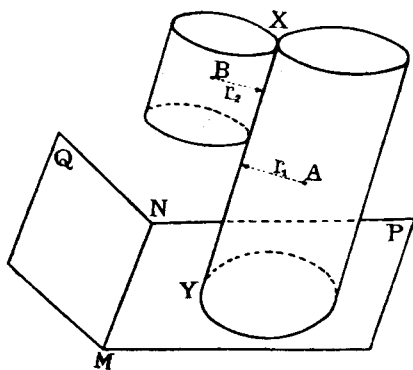
Число рѣшеній задачи зависитъ отъ величины заданныхъ элементовъ α , β , r_1 и r_2 отъ расположенія точекъ A и B и отъ величины угла φ между плоскостями P и Q . Въ общемъ случаѣ будетъ 4 рѣшенія. Два изъ нихъ показаны на черт. 450 (линіи XU и ZW). Проведя цилиндры A и B съ осями параллельными линіи $S2$ сѣченія конусовъ, мы получили бы еще два рѣшенія, если эти цилиндры пересѣкнутся,—одно рѣшеніе, если эти цилиндры каснутся,—и ни одного, если цилиндры не пересѣкнутся и не каснутся. Если конуса не пересѣкаются, а лишь касаются другъ друга (черт. 451), то возможны два рѣшенія (линіи XU и ZW) лишь тогда, когда цилиндры пересѣкаются. Если же цилиндры касаются (черт. 452), то рѣшеніе будетъ одно и, наконецъ, если цилиндры не будутъ ни пересѣкаться, ни касаться, то не будетъ ни одного рѣшенія (черт. 453). Равнымъ образомъ не будетъ ни одного рѣшенія, если конусы не будутъ ни пересѣкаться, ни касаться (черт. 454). Такимъ образомъ, въ зависимости отъ величины и отъ взаимнаго расположенія заданныхъ элементовъ возможны одновременно: или 4 рѣшенія, или 3, или 2, или 1, или ни одного.

Рѣшеніе задачи въ проекціяхъ. Разсмотримъ, какъ рѣшить задачу въ проекціяхъ. Примемъ общій случай рѣшенія, соответствующій чертежу 450-му, и построимъ одну изъ искомыхъ линій, напримѣръ, XU .

Планъ рѣшенія задачи будетъ слѣдующій: 1) построение двухъ конусовъ, удовлетворяющихъ упомянутымъ условіямъ, 2) нахождение линіи сѣченія этихъ конусовъ, 3) построение двухъ цилиндровъ съ осями, проходящими соответственно черезъ точки *A* и *B* и параллельными одной изъ найденныхъ линій сѣченія конусовъ, 4) построение линіи сѣченія этихъ цилиндровъ.

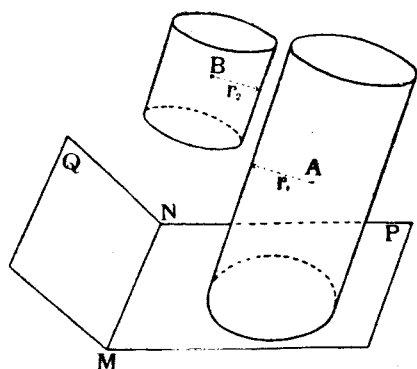


Черт. 451.

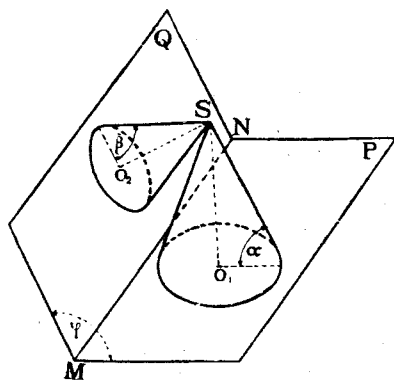


Черт. 452.

Для того, чтобы построить линію сѣченія двухъ конусовъ выгодно переимѣнить плоскости проекціи такъ, чтобы линія сѣченія плоскостей *P* и *Q*, а слѣдовательно и сами плоскости *P* и *Q*, были перпендикулярны къ новой плоскости проекцій. Тогда на эту новую плоскость проекцій оба конуса спроектируются въ видѣ треугольниковъ съ общей вершиной, а углы при основаніяхъ ихъ будутъ соответственно равны α и β .



Черт. 453.

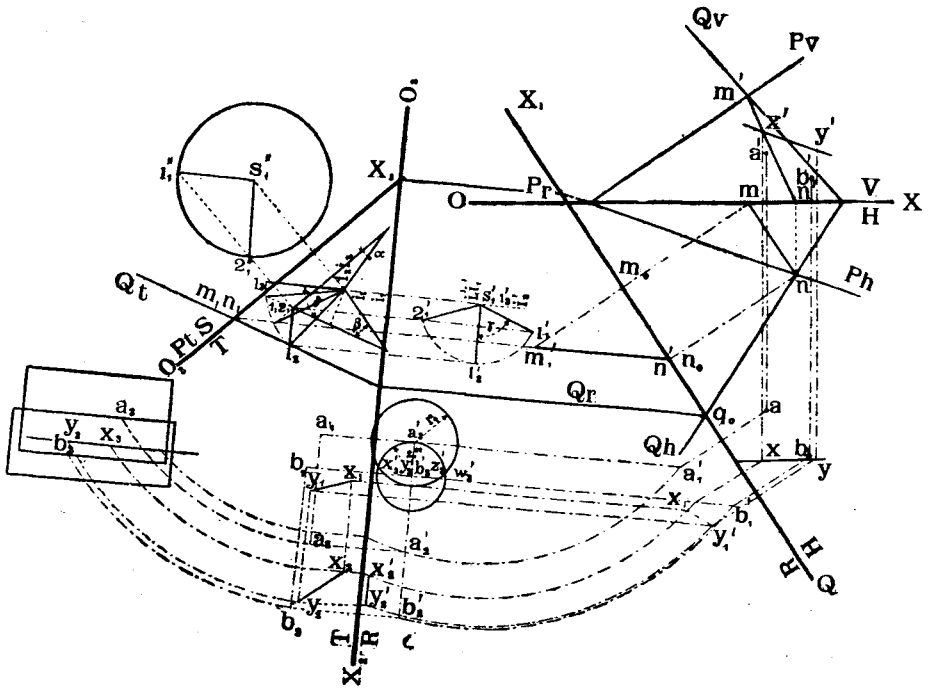


Черт. 454.

Переходимъ къ чертежу 455. На немъ даны (справа сверху) плоскости *P* и *Q* слѣдами *Pv*, *Ph* и *Qv*, *Qh* и проекція *a'*, *a* и *b'*, *b* точекъ *A* и *B*. Находимъ проекціи *m'n'*, *mn* линіи *MN* сѣченія плоскостей *P* и *Q* и мѣняемъ плоскости проекцій до тѣхъ поръ, пока линія *MN* не сдѣлается перпендикулярной новой плоскости проекцій. Для этого сначала вмѣсто *V* выбираемъ плоскость *B*, перпендикулярную *П* и параллельную *MN* ($O_1X_1 \parallel mn$); въ системѣ $\frac{B}{H}$ имѣемъ плоскости *P* и *Q* заданными

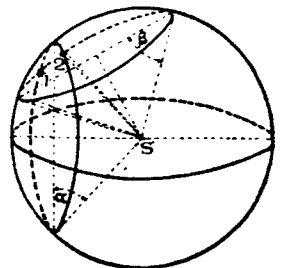
слѣдами Pr , Ph и Qr , Qh точки A и B —заданныя проекціями a_1' , a и b_1' , b и прямую MN —въ проекціяхъ $m_1'n_1'$ и mn . Мѣняемъ снова плоскости проекцій, замѣняя H черезъ T , причемъ T выбираемъ перпендикулярной MN ($O_2X_2 \perp m_1'n_1'$). Въ системѣ $\frac{T}{R}$ плоскости P в Q опредѣляются слѣдами Pr , Pt и Qr , Qt , точки A и B —проекціями a_1' , a_1 и b_1' , b_1 и прямая MN —проекціями $m_1'n_1'$, m_1n_1 .

Задаемъ въ системѣ $\frac{T}{R}$ случайной точкой $S(s_1', s_1)$ и принимаемъ ее за общую



Черт. 455.

вершину двухъ конусовъ. Ось одного изъ нихъ будетъ перпендикулярна къ плоскости P и спроектируется на T въ линію, перпендикулярную къ Pt , а самый конусъ спроектируется на T въ видѣ равнобедреннаго треугольника съ угломъ при основаніи равнымъ α . Другой конусъ спроектируется на T также въ видѣ треугольника, высота котораго будетъ перпендикулярна Qt , а углы при основаніи будутъ равны β . Что же касается длинъ равныхъ сторонъ второго треугольника, то выбираемъ ихъ равными длинѣ равныхъ сторонъ перваго треугольника на основаніи слѣдующихъ соображеній. Представимъ себѣ въ пространствѣ шаръ (черт. 456) съ центромъ въ точкѣ S . Примемъ эту точку за вершину двухъ конусовъ съ углами α и β при основаніи. Для нахождения линій сѣченія этихъ конусовъ достаточно замѣнить точки 1 и 2 пересѣченія между собой слѣдовъ (круговъ) обоихъ конусовъ на поверхности шара и соединить эти точки съ вершиною S . Но круги



Черт. 456.

основанія конусовъ пересѣкутся при условіи, что они лежатъ на поверхности шара, т. е. длины производящихъ обоихъ конусовъ будутъ равны, чѣмъ и объясняется поставленное ранѣе условіе равенства сторонъ въ обоихъ треугольникахъ (черт. 455) служащими проекціями конусовъ на плоскости T . Проекціями на плоскости T точекъ 1 и 2 сѣченія круговъ основанія конусовъ будетъ точка $1_1, 2_1$. Чтобы найти разстоянія точекъ 1 и 2 отъ плоскости T перейдемъ къ новой системѣ плоскостей проекцій $\frac{S}{T}$, замѣнивъ R черезъ плоскость S , параллельную основанію конуса съ угломъ α . Проекція вершины конуса на плоскости S будетъ точка S_1'' , основаніе конуса (α) на плоскости S спроектируется въ видѣ круга, на которомъ находятся проекціи $1_1''$ и $2_1''$ точекъ 1 и 2. Теперь нетрудно построить проекціи $1_1'$ и $2_1'$ тѣхъ же точекъ и на плоскости R . Такимъ образомъ мы рѣшили двѣ изъ поставленныхъ нами четырехъ частныхъ задачъ и нашли двѣ линіи $S1$ и $S2$ въ проекціяхъ на плоскости T и R , гдѣ эти линіи обозначены $s_1'1_1'$, $s_1'1_1$ и $s_1'2_1'$, $s_1'2_1$. Выберемъ изъ нихъ одну $S1$ и будемъ проводить искомую линію параллельно линіи $S1$.

Переходимъ теперь къ рѣшенію третьей и четвертой частныхъ задачъ, т. е. построимъ два цилиндра, оси которыхъ были бы параллельны линіи $S1$ и проходили бы—одного черезъ точку A , а другого—черезъ точку B , и радиусы этихъ цилиндровъ были бы соответственно равны даннымъ отрѣзкамъ r_1 и r_2 , и затѣмъ найдемъ линіи сѣченія этихъ цилиндровъ.

Сѣченіе цилиндровъ съ параллельными осями легко находить, если оси ихъ перпендикулярны къ плоскости проекцій. Поэтому поворачиваемъ линію $S1$, параллельно которой должны быть направлены оси цилиндровъ, а вмѣстѣ съ ней и точки A и B въ системѣ $\frac{T}{R}$ до тѣхъ поръ, пока линія $S1$ не будетъ перпендикулярна къ B . Для этого первое вращеніе производимъ вокругъ линіи I_1I_1 ($i_1'i_1'$, i_1i_1), проходящей черезъ точку S и перпендикулярную къ R . Вращаемъ линію $S1$ до тѣхъ поръ, пока она не будетъ параллельна плоскости T . Тогда $S_1'1_2'$ должна быть параллельна O_2X_2 .

Уголъ поворота— γ . Проекціи поворачиваемыхъ элементовъ послѣ перваго поворота будутъ: линіи $S1$ —($s_1'1_2'$, s_1i_2), точекъ A и B . . a_2' , a_2 и b_2' , b_2 .

Второй поворотъ производимъ вокругъ оси I_2I_2 ($i_2'i_2'$, i_2i_2), проходящей черезъ точку S и перпендикулярной къ плоскости T . Вращеніе производимъ до тѣхъ поръ, пока линія $S1$ не будетъ перпендикулярна къ плоскости R ; уголъ поворота— δ . Новое, окончательное положеніе линіи $S1$ и точекъ A и B послѣ второго поворота будетъ: $s_1'1_1$, s_1i_1 , a_3' , a_3 , b_3' , b_3 . Такъ какъ теперь линія $S1$, параллельно которой должны располагаться оси цилиндровъ, перпендикулярна къ B , то на эту плоскость оба цилиндра спроектируются въ видѣ круговъ: одного съ центромъ a' , радиуса r_1 и другого съ центромъ b_3' , радиуса r_2 .

На T оба цилиндра спроектируются въ видѣ прямоугольниковъ. Горизонтальная проекція искомой линіи сѣченія двухъ цилиндровъ опредѣлится точкой x_2y_2 пересѣченія круговъ (другое рѣшеніе—точка z_3w_3), а вертикальная проекція—будетъ линія x_2y_2 , перпендикулярная O_2X_2 (одно рѣшеніе).

Такимъ образомъ искомая линія найдена. Остается ее привести въ заданную систему $\frac{T}{R}$. Для этого достаточно сдѣлать два обратныхъ вращенія вокругъ осей I_1I_1 и I_2I_2 на соответственно на углы γ и δ , и двѣ перемѣны плоскостей проекцій. При этихъ построеніяхъ линія XU въ проекціяхъ обозначена слѣдующимъ образомъ:

1. Система $\frac{T}{R}$. . . а) Линія $x_2y_2, x_3'y_3'$.

б) послѣ обратнаго поворота вокругъ оси I_2I_2 на уголъ δ —
 $x_2y_2, x_2'y_2'$,

с) послѣ обратнаго поворота вокругъ оси I_1I_1 на уголъ γ —

$$x_1y_1, x_1'y_1'$$

2. Система $\frac{R}{H} \dots xy, x_1'y_1'$

3. Система $\frac{V}{H} \dots xy, x'y'$ (искомое рѣшеніе).

§ 24. Построеніе тригранныхъ угловъ.

Каждый тригранный уголъ S заключаетъ въ себѣ 6 элементовъ:

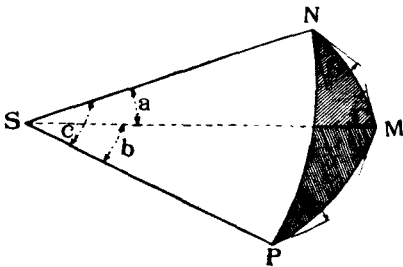
1. три плоскихъ угла a, b и c ;
2. три двугранныхъ A, B, C (черт. 457).

Условимся обозначать плоскіе углы, противолежащіе двуграннымъ, малыми буквами алфавита того же наименованія.

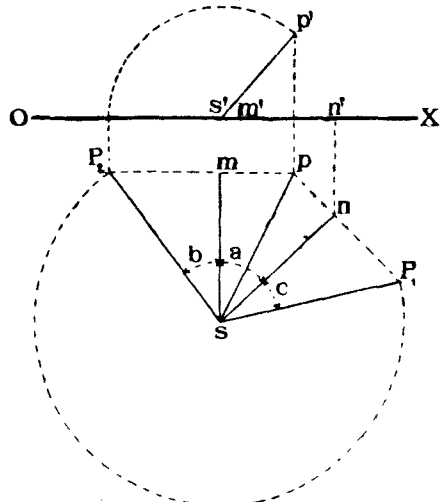
Каждые три элемента вполне опредѣляютъ тригранный уголъ. Поэтому возможно столько комбинацій заданій триграннаго угла, сколько можно составить сочетаній изъ 6 элементовъ по три.

Сочетанія эти будутъ таковы (отбрасывая повторенія).

- 1) $a, b, c.$
- 2) $a, B, C.$
- 3) $a, b, A.$
- 4) $B, C, c.$
- 5) $A, b, c.$
- 6) $A, B, C.$



Черт. 457.



Черт. 458.

Разсмотримъ рѣшеніе задачъ на построеніе тригранныхъ угловъ.

Задача № 39.

Даны три плоскихъ угла $a, b, c.$ (сочетаніе 1-е). Построить тригранный уголъ (черт. 458).

Рѣшеніе.

Предположимъ, что тригранный уголъ $MNPS$ разрѣзанъ по одному ребру, на-примѣръ, по SP , и грани его совмѣщены одна съ другою и съ плоскостью $H.$

Тогда углы $a, b,$ и c будутъ изображены на плоскости H безъ искаженія. Расположимъ ребро SM перпендикулярно къ $V.$ Далѣе отмітимъ на ребрѣ SP въ двухъ его положеніяхъ SP_1 и SP_2 одну и ту же точку P и будемъ поворачивать грани SNP и SMP соответственно вокругъ реберъ SN и SM до тѣхъ поръ, пока обѣ точки P_1 и P_2 не совпадутъ. Такъ какъ движеніе точекъ P_1 и P_2 будетъ совершаться въ плоскостяхъ, соответственно перпендикулярныхъ къ SM и $SN,$ то гори-

горизонтальныя проекціи этихъ точекъ будутъ двигаться по линіямъ P_1p и P_2p , соответственно перпендикулярнымъ къ sm и sn . Точка p — пересѣченія линій P_2p и P_2p и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки.

Вертикальная ея проекція должна лежать въ перпендикулярѣ къ OX , опущенномъ изъ точки p . Такъ какъ ребро SM выбрано перпендикулярнымъ къ OX , то разстояніе точки p до этого ребра будетъ практиковаться на V безъ искаженія; поэтому засѣкаемъ перпендикуляръ pp' изъ точки m' , какъ изъ центра, дугою радиуса равнаго длинѣ mP_2 перпендикуляра, опущеннаго изъ точки P_2 на ребро sm .

Точка p' и будетъ искомой вертикальной проекціей точки P .

Задача № 40. Даны два двугранныхъ угла B и C и плоскій уголь a между ними (сочетаніе 2-ое). Построить тригранный уголь.

Рѣшеніе.

Предположимъ, что грань SMN , заключающая въ себѣ плоскій уголь a , совмѣщена съ плоскостью H такъ, что ребро SM стало перпендикулярнымъ къ V . Если обозначить двугранный уголь при ребрѣ SM черезъ B , то этотъ уголь на V спроектируется безъ искаженія.

Поэтому проводимъ линію $m'p'$, слѣдъ на V грани SMP , подъ угломъ B къ OX .

Переходимъ теперь отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V_1}{H_1}$ съ новой осью O_1X_1 , причемъ V_1 выбираемъ перпендикулярной къ ребру SN . Строимъ въ этой системѣ слѣдъ $p'_1n'_1$ грани SPN на V_1 такъ же, какъ и раньше это дѣлали для грани SPM въ системѣ $\frac{V}{H}$. Линія $p'_1n'_1$ пойдетъ подъ угломъ C къ O_1X_1 .

Теперь остается въ системѣ $\frac{V}{H}$ найти линію сѣченія граней SPM и SPN . Для этого пересѣкаемъ обѣ грани горизонтальной плоскостью, отстоящею отъ H на какомъ нибудь разстояніи h , и находимъ линіи сѣченія этой плоскости съ плоскостями граней. Точка P пересѣченія этихъ линій и будетъ опредѣлять положеніе ребра SP . Вертикальная же проекція p' этой точки будетъ лежать на линіи $m'p'$.

Задача № 41.

Даны два плоскихъ угла a и b и одинъ двугранный A , протнволежащій плоскому углу a (сочетаніе 3-е). Построимъ тригранный уголь (черт. 460).

Рѣшеніе.

Строимъ грань SMN , заключающую уголь b , на плоскости H такъ, чтобы ребро SM было перпендикулярно къ OX .

Тогда уголь A при ребрѣ SM будетъ на V проектироваться безъ искаженія и слѣдъ грани SMP на V пойдетъ по линіи $s'p'$ подъ угломъ A къ OX . Искомое ребро SP опредѣлится, очевидно, какъ линія сѣченія грани SMP съ поверхностью конуса, вешина котораго находится въ точкѣ S , осью служить ребро SN , а производящія наклонены къ этой оси подъ угломъ a .

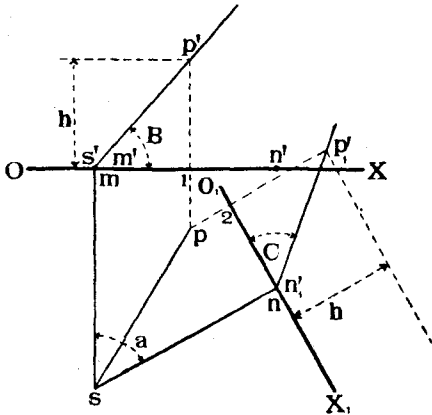
Для построенія этой линіи переходимъ отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V'}{H'}$, причемъ V' выбираемъ перпендикулярной къ SN . Строимъ въ системѣ $\frac{V'}{H'}$ слѣдъ mp'_1 грани SMP на V' , и слѣдъ конуса и находимъ точки p'_1 и p'_2 пересѣченія этихъ слѣдовъ. Задача, очевидно, допускаетъ въ общемъ случаѣ два рѣшенія. Найдя, на примѣръ, точку P въ системѣ $\frac{V}{H}$ и соединивъ ее точкою S , мы такимъ образомъ опредѣлимъ искомое ребро SP .

Задача № 42.

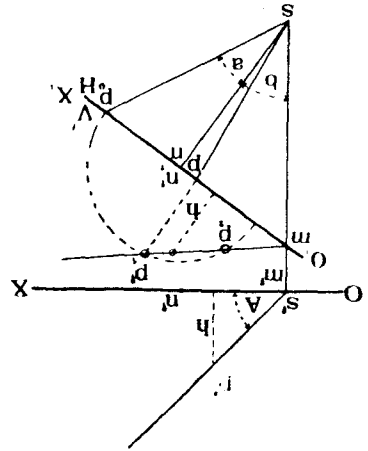
Даны два двугранныхъ угла B и C и одинъ плоскій e , противолежащій одному изъ данныхъ двугранныхъ угловъ (сочетаніе 4-ое). Требуется построить тригранный уголь (черт. 461).

Рѣшеніе.

Проводимъ въ плоскости H ребро SM перпендикулярно къ оси OX . Пусть черезъ это ребро проходитъ грань SMP , составляющая уголъ B съ плоскостью грани SMN , причемъ последнюю предполагаемъ совмѣщенной съ H . Уголъ B будетъ проектироваться на V безъ искаженія. Проводимъ слѣдъ $m'p'$ грани SMP на V подъ угломъ B къ OX . Далѣе совмѣщаемъ эту грань съ H , вращая ее около

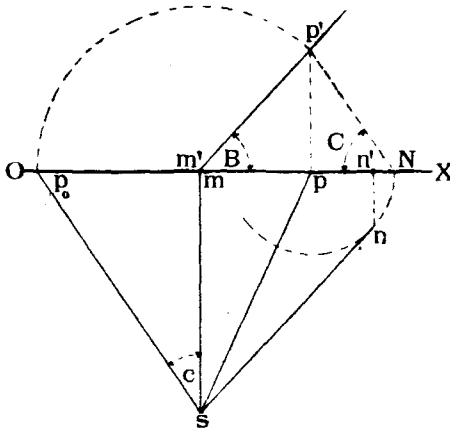


Черт. 459.

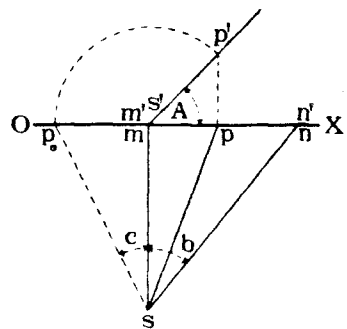


Черт. 460.

ребра SM . После совмѣщенія уголъ c будетъ проектироваться на N безъ искаженія. Проводимъ изъ случайной точки p_0 , выбранной на оси OX , линію p_0S подъ угломъ c къ ms . Точку S пересѣченія линіи p_0S и ms принимаемъ за вершину трп-



Черт. 461.



Черт. 462.

граннаго угла. Возвращаемъ теперь грань SMP въ прежнее положеніе. Пусть повернутое обратно положеніе точки p_0 будетъ p' . Теперь задача сводится къ слѣдующей: черезъ данную прямую SP провести плоскости подъ угломъ C къ H .

Для рѣшенія этой задачи поступаемъ слѣдующимъ образомъ: принимаемъ точку P_0 за вершину конуса, производящія котораго наклонены къ H подъ угломъ

Однако, разъ заданъ опредѣленный законъ образовапія такой линіи, всегда можно построить проекціи ея, а имѣя послѣднія, можно, въ случаѣ надобности, построить изъ проволоки и модели линіи ¹⁾.

Въ большинствѣ случаевъ проекціи такихъ линій можно построить, применяя методы вращенія плі перемѣны плоскостей проекцій, дабы по возможности избѣжать построенія эллипсовъ и случайныхъ кривыхъ линій, а пользоваться для нахождения точекъ искомой линіи кругами и прямыми линіями.

Разсмотримъ подробно рѣшеніе одной изъ такихъ задачъ.

Задача № 45. Построить траекторію точки *A*, движеніе которой опредѣляется слѣдующимъ образомъ (черт. 464): точка *A* лежитъ на окружности круга, катящагося по кругу основанія прямого круговаго конуса; радиусъ катящагося круга *R*; радиусъ круга основанія конуса = $3R$; плоскость малаго круга все время остается касательной къ поверхности конуса.

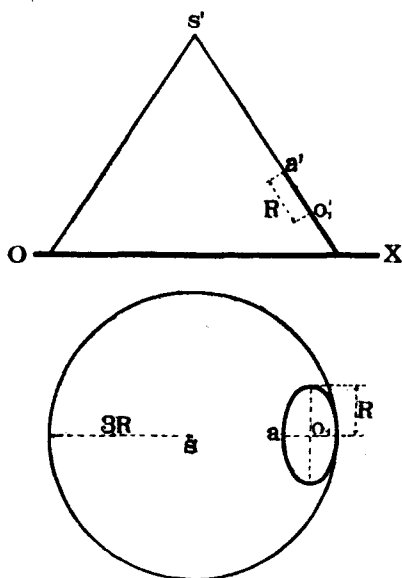
Рѣшеніе.

а) *Опредѣленіе особенныхъ точекъ. Траекторія центра круга.*

Пусть имѣемъ въ проекціяхъ (черт. 466) стоящій на *H* прямой круговой конусъ. Кроме того, задано въ проекціяхъ одно изъ положеній катящагося круга и показана точка *A*₁ (*a*₁, *a*₁'), находящаяся на этомъ кругѣ и занимающая въ данномъ его положеніи наивысшее положеніе, при которомъ она въ то же время и попадаетъ на поверхность конуса, располагаясь на производящей конуса *SA*₁ (*s*₁, *s*₁').

На чертежѣ показано построение проекціи малаго круга на *V* и на *H* (въ видѣ эллипса), произведенное при помощи совмѣщенія плоскости малаго круга *H* вращеніемъ вокругъ горизонтальнаго *Hh* плоскости малаго круга.

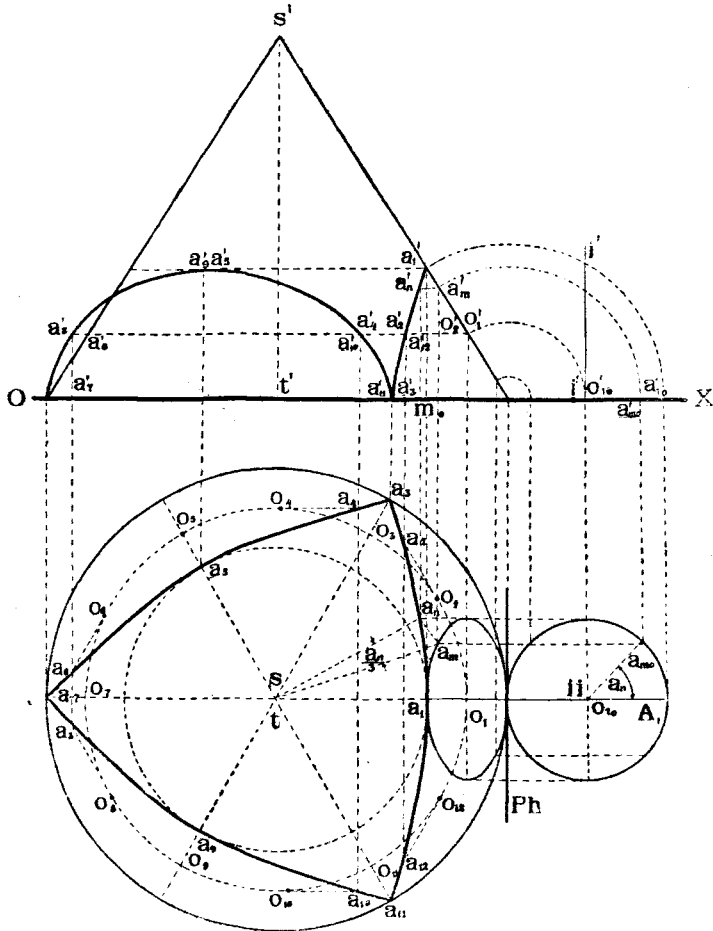
Такъ какъ радиусъ круга, касательнаго поверхности конуса, въ три раза меньше радиуса круга основанія конуса, то этотъ малый кругъ сдѣлаетъ три оборота, пока пройдетъ всю окружность основанія конуса, и потому точка *A* будетъ три раза находиться въ наивысшемъ и три раза въ наинизшемъ положеніяхъ. Когда точка *A*, находящаяся въ наивысшемъ положеніи, перейдетъ опять въ наивысшее положеніе, т. е. окружность сдѣлаетъ полный оборотъ, то по окружности основанія конуса будетъ пройдена дуга въ 120° , а когда точка *A* придетъ въ наинизшее положеніе, то по окружности основанія конуса будетъ пройдена дуга въ 60° . Отсюда мы заключаемъ, что горизонтальныя проекціи точекъ наивысшаго и наинизшаго положенія, чередуясь, находятся на горизонтальныхъ проекціяхъ производящихъ конуса, проведенныхъ черезъ 60° , начиная отъ производящей *SA*. При этомъ горизонтальныя проекціи наивысшихъ точекъ находятся также на окружности, описанной изъ точки *s* радиусомъ равнымъ $2R$, а горизонтальныя проекціи точекъ наинизшаго положенія располагаются на окружности круга основанія конуса.



Черт. 464.

¹⁾ Подобныя модели имѣются въ кабинетѣ теоретической механики Петроградскаго Политехническаго Института и въ кабинетѣ практической механики Петроградскаго Университета.

Таким образом, горизонтальные проекции наивысших и наинизших точек ($a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$), определяются как пересечения окружностей и горизонтальных проекций производящих, делящих окружность основания данного конуса на шесть равных частей. Траектория центра катящегося круга, при перемещениях его, будет проектироваться на H в окружность, описанную из точки s с радиусом, равным so ; что касается вертикальных проекций наивысших точек, то они определяются как пересечения перпендикуляров, опущенных из горизонтальных проекций этих



Черт. 465.

точек на ось OX и прямой проведенной из точки a_1' параллельно оси OX (длина $a_1'm_0$ выражает длину наибольшего расстояния точки A до плоскости H). Вертикальные проекции наинизших положений точки A определяются, как основания перпендикуляров опущенных из горизонтальных проекций точек этих положений на ось OX . При этом вертикальные проекции a_3', a_{11}', a_5' и a_7' попарно совпадут. Вертикальные проекции центра катящегося круга располагаются на прямой, проведенной из точки o_1' параллельно OX .

Следующими особенными точками искомой траектории будут точки, зани-

Такимъ образомъ полное движеніе точки A_1 мы какъ бы раскладываемъ на два: *относительное*, вращая A_1 въ положеніе A_m и *переносное*, вращая A_m въ положеніе A_n .

Воспользуемся для построенія случайныхъ точекъ траекторіи именно этимъ вторымъ способомъ, такъ какъ онъ требуетъ меньше построеній, позволяя ограничиться лишь однимъ совмѣщеніемъ малаго круга съ плоскостью H .

Для рѣшенія этой задачи въ проекціяхъ совмѣщаемъ кругъ съ плоскостью H , вращая плоскость его вокругъ Ph , и поворачиваемъ кругъ на мѣстѣ вокругъ оси Π (ii' , $i'i'$), перпендикулярной къ H на уголъ α_n . Тогда точка A_1 займетъ положеніе A_{m0} . Поднимаемъ кругъ въ его прежнее положеніе и находимъ проекціи (α_m , α'_m) точки A_m . Для полученія проекцій окончательнаго положенія точки A_n достаточно теперь повернуть точку A_m вокругъ оси конуса на уголъ $\left(\frac{\alpha_n}{3}\right)^0$, что и выполнено на чертежѣ.

Построивъ подобнымъ же образомъ рядъ положеній точки A при поворотахъ малаго круга на разные углы и найдя проекціи этихъ точекъ, соединяемъ ихъ въ соответственныхъ проекціяхъ съ ранѣ полученными особыми точками плавной кривой.

Изъ чертежа видно, что кривая въ пространствѣ дѣлится на три одинаковыхъ вѣтви, горизонтальныя проекціи которыхъ одинаковы.

с) *Случай, когда ось ST конуса не перпендикулярна ни къ H , ни къ V .*

Въ этомъ случаѣ мѣняемъ два раза плоскости проекцій, или дѣлаемъ два поворота вокругъ осей, послѣдовательно перпендикулярныхъ къ H и къ V до тѣхъ поръ, пока ось конуса не сдѣлается перпендикулярной къ плоскости проекцій (на чертежѣ 466, S_1T_1 перпендикулярна къ Q , причемъ примѣненъ методъ переменны плоскостей проекцій). Въ новой системѣ $\frac{R}{Q}$ слѣдуетъ построить траекторію точки A , какъ было объяснено раньше, а затѣмъ обратной переменной плоскостей проекцій (или обратными поворотами), необходимо привести полученную траекторію къ заданному положенію оси конуса ST въ системѣ $\frac{V}{H}$ ¹⁾.

¹⁾ Условія другихъ задачъ для упражненій см. Н. Рынинъ, «Сборникъ задачъ для упражненій и заданій для экуръ по Начертательной Геометріи». Петроградъ. 1916 г.

УКАЗАТЕЛИ ИМЕНЪ И ПРЕДМЕТОВЪ.

Указатель имен¹⁾.

Адемаръ III, 196, 284.
Анановъ 115.
Андреевъ 225.
Архимедъ 189.
Аскіери III.

Большое Соляное Озеро 198.
Брикаръ 115.
Бриссъ III.
Бриардъ 67.
Будаевъ III.
Бурместеръ III.

Валень 154.
Вильсонъ III, 3, 196.
Винеръ I, 67, 196.
Булей III.

Гаукъ III.
Гауснеръ 115.
Гашеттъ 196.
Голлеръ 283.
Гудваинъ 283.
Гурнери III.
Гьибенъ 115.

Декартъ 76.

Игльсъ III.

Кларкъ 3.
Коханскій 154.

Куза 154.
Курдюмовъ III, IV, 1, 171, 212, 262.

Лоріа III.
Лохъ Лаби 115.

Монжъ III, 1, 4.
Мюллеръ III.

Оливье III.

Петръ Св. 206.
Пилле III.

Редеръ III, 284.
Римъ 206.
Рихтеръ 161.
Рынинъ IV, 149, 219, 225, 283.

Р. J. 196.

Фидлеръ III.

Чебышевъ 249.

Шаль 262.
Шовьеръ 252.
Пітурмъ 115.

Эбнеръ 152.
Энрикесъ III.

Ярковскій 225.

¹⁾ Числа показываютъ страницы листа.

Указатель предметов ¹⁾

- Аксонометрія 1.
 Арка коническая 175.
 » образованная коноидомъ 191.
 » образованная цилиндромъ 186.
 Аэропланъ 56.
- Болтъ 217.
- Ваза 280.
 Вершина конуса 175.
 Видимость элементовъ 60.
 Винтъ Архимеда 190.
 » воздушный 249.
 » съ прямоугольной нарѣзкой 191.
 » съ треугольной нарѣзкой 194.
- Вращеніе 69.
 » вокругъ горизонтали 83.
 » вокругъ двухъ осей 78.
 » вокругъ одной оси 70.
 » вокругъ фронталы 83.
- Врубка 103.
- Гелисоидъ косою 193.
 » косою кольцевою 194.
 » неразверзаемый 188.
 » разверзаемый 178.
 » разверзаемый кольцевою 179.
- Геометрія начертательная 1.
 » проективная I.
- Гиперболоидъ вращенія 202.
 » эллиптическій однополый 210.
- Горизонталь плоскости 42.
 » поверхности 212.
- Горло гиперболоида 203.
 » поверхности 197.
- Дамба 44.
 Дворикъ свѣтовой 149.
 Длина оборота винтовой линіи 164.
 Додекаэдръ 66.
 Домъ 19, 98, 148.
- Заданіе плоскости 35.
- Задача № 1 12.
 » № 2 19.
 » № 3 21.
 » № 4 25.
 » № 5 27.
 » № 6 32.
 » № 7 34.
 » № 8 41.
- Задача № 9 44.
 » № 10 48.
 » № 11 54.
 » № 12 56.
 » № 13 59.
 » № 14 76.
 « № 15 82.
 » № 16 90.
 » № 17 98.
 » № 18 103.
 » № 19 116.
 » № 20 122.
 » № 21 128.
 » № 22 128.
 » № 23 149.
 » № 24 217.
 » № 25 225.
 » № 26 226.
 » № 27 234.
 » № 28 235.
 » № 29 237.
 » № 30 249.
 » № 31 280.
 » № 32 281.
 » № 33 293.
 » № 34 294.
 » № 35 295.
 » № 36 296.
 » № 37 296.
 » № 38 296.
 » № 39 301.
 » № 40 302.
 » № 41 302.
 » № 42 302.
 » № 43 304.
 » № 44 304.
 » № 45 305.
- Зеркало 59, 82.
 Зубчатое колесо гиперболоидальное 202.
 Зубчатое колесо коническое 176.
 Зубчатое колесо цилиндрическое 174.
- Изофота 285.
 Икосаэдръ 66.
 Исчезновеніе линіи 17.
- Касательная къ кривой линіи 150, 155.
 Колонна 205, 206, 281, 287.
 Кольцо 199, 273, 287.
 Коноидъ 188.
 » винтовой 188.
 » кольцевою 189.

¹⁾ Цифры показываютъ страницы текста.

Контуръ видимости поверхности 172.
 » тѣни падающей 133, 267.
 » тѣни собственной 133, 266.

Конусъ 175.

Координаты точки 10.

Косая плоскость 181.

» » наклонная 181.

» » прямая 182.

Косой цилиндръ 195.

» » отрѣхъ направляющихъ 191.

Кранъ подъемный 34.

Крестъ пространственный 28.

Кривая ошибокъ 154.

Кронштейнъ 211.

Крыло мельницы 184.

Крыша 48, 90, 116, 184.

Кубъ 66.

Курзалъ 198,

Линіи скрещивающіяся 28.

Линія блестящая 289.

Линія, вертикально проектирующая б.

Линія винтовая 163.

» » извивающаяся влѣво 166.

» » извивающаяся вправо 166.

Линія, горизонтально проектирующая б.

Линія двойкой кривизны 150, 161.

Линія геодезическая 247.

Линія кривая плоская 150.

Линія наибольшаго ската плоскости 43.

Линія направляющая конуса 175.

» направляющая косой плоскости 182.

» направляющая цилиндра 172.

» образующая 169.

» отдѣла 266.

» перпендикулярная къ плоскости 54.

» производящая 169.

» равной освѣщенности 285.

» сжатія 182.

Лучъ падающій 284.

» отраженный 284.

Лѣстница винтовая 190, 206.

Методъ Монжа 4.

» ортогональныхъ проекцій 1, 2.

Моногранники взаимные 67.

Моногранникъ правильный 65.

Модели 149, 243.

Мѣсто геометрическое 292.

Набережная 44, 123, 184

Насыпь для шоссе 128.

» желѣзнодорожная 69, 98, 128, 170.

Ниша 198, 275.

Нормаль къ кривой линіи 155.

» » » поверхности 265.

Нормальное сѣченіе 174.

Окна сооружений 149.

Октаедръ 66.

Освѣщенность 284.

» дѣйствительная 284.

» кажущаяся 284.

Ось винтовой линіи 163.

» проекцій 5.

» проекцій новая 92.

Откосъ желѣзнодорожнаго полотна 176, 179

» шоссе 130.

Отраженіе луча 82.

Паденіе плоскости 43.

Параболоидъ гиперболической 181.

Перемѣна двухъ плоскостей проекцій 98.

» одной плоскости проекцій 92.

» плоскостей проекцій 91.

Пересѣченіе кривыхъ поверхностей 212.

» многогранниковъ 104.

Перила винтовой лѣстницы 206.

Перспектива 1.

Планъ 11.

Плоскость 35.

Плоскость параллелизма 181.

» проектирующая вертикально 13.

» проектирующая горизонтально 14.

» проекцій 4.

» проекцій вертикальная 4.

» » вертикальная вторая 5.

» » вертикальная новая 93.

» » горизонтальная 4.

» » горизонтальная новая 93.

» профильная 5.

» фасадная 5.

Поверхность вращенія 197.

» графическая 212.

» коническая 175.

» косая 171.

» линейчатая 169.

» неразверзаемая 171.

» обертывающая 171.

» образующая 171.

» сбразующая 171.

» одинаковаго ската 179.

» разверзаемая 169.

» съ кривою производящею 169.

» съ кривою производящею перемѣннаго вида 207, 211.

» съ прямою производящею 169.

» съ ребромъ возврата 176.

» топографическая 212.

» цилиндрическая 172.

Подкасательная 167.

Подшипникъ кольцевой 171.

» цилиндрической 174.

Пола плоскости б.

» » верхняя б.

» » задняя б.

» » нижняя б.

» » передняя б.

Построеніе моногранниковъ 124.

Приближенныя построенія 152.

Призма стеклянная 76.
 Призматойдъ 67, 69.
 Проектирование угловъ 32.
 Проекція вертикальная линіи 13
 » » новая 93.
 » » точки 5.
 Проекція горизонтальная линіи 13.
 » » новая 93.
 » » точки 5.
 Проекція круга 156.
 Проекція ортогональная точки 4.
 » профильная точки 5.
 » прямоугольная 4.
 » съ числовыми отмѣтками 1.
 Пропеллеръ 249.
 Простираніе плоскости 43.
 Профиль 11.
 Пружина цилиндрическая 191.
 Развертка кривыхъ поверхностей 242.
 » поверхностей многогранни-
 ковъ 116.
 Радиусъ винтовой линіи 163.
 Ребро возврата 177.
 Руль аэроплана 56.
 Сарай кирпичный 41.
 Сводъ бетонный, образованный кривымъ
 » цилиндромъ 204.
 » желѣзо-бетонный, образованный
 » гелисоидальнымъ цилиндромъ 206.
 » коническій 234, 235.
 » крестовый 225.
 » марсельскій 197.
 » надъ косымъ проходомъ 195.
 » цилиндрической 174, 225, 226, 234,
 237.
 » шаровой 235, 237.
 Слѣдъ линіи 22.
 » линіи вертикальный 22.
 » » горизонтальный 22.
 » плоскости 35.
 » плоскости вертикальный 35.
 » » горизонтальный 36.
 » поверхности 173, 175.
 Синусоида 164.
 Совмѣщеніе 87.
 Спряжленіе дуги круга 153.
 » кривой линіи 152.
 Стѣна 12.
 Стержень витой 186.
 Стропила 27.
 Таблица кривыхъ поверхностей 170.
 Теорема 1-я—6.
 » 2-я—7.
 » 3-я—7.
 » 4-я—21.
 » 5-я—22.
 » 6-я—26.
 » 7-я—28.
 » 8-я—30.
 » 9-я—33.
 » 10-я—45.
 » 11-я—45.
 » 12-я—47.
 » 13-я—53.
 » 14-я—55.

Теорема 15-я—71.
 » 16-я—150.
 » 17-я—167.
 Тетраэдръ 65.
 Торъ 199.
 Точка блестящая 289.
 » возврата 162.
 » кратная 163
 » особенная 162.
 » перегиба 162.
 » повторенія 163.
 » схода слѣдовъ 36.
 Тренога 21.
 Труба водосточная 175.
 » газопроводная 32.
 » фабричная 54.
 » флянцевая 175, 204.
 Тумба 203.
 Тѣнь линіи. 138.
 » многогранника 131, 137.
 » кривой поверхности 266.
 » падающая 133.
 » плоской фигуры 138.
 » собственная 131.
 » точки 138.
 Уголь двугранный 64.
 » наибольшаго ската плоскости 43.
 » отраженія 284.
 » паденія 284.
 » паденія плоскости 43.
 » плоскій 301.
 » простиравія плоскости 43.
 » пространственный 43.
 » тригранный 301.
 » тѣлесный 64.
 » тѣлесный дополнительный 65.
 » тѣлесный полярный 65.
 Фасадъ боковой 11.
 » главный 11.
 Ферма стропильная 128.
 Флянецъ 287.
 Фронталь плоскости 42.
 Храмъ мормоновъ 198.
 » Св. Петра 206.
 Цилиндроидъ 184.
 » винтовой 185.
 Цилиндръ 172.
 » гелисоидальный круглаго нор-
 мального сѣченія 206.
 » постоянного плоскаго гори-
 зонтального сѣченія 205.
 » постоянного плоскаго меридіо-
 нального сѣченія 206.
 » кривой съ плоскими направ-
 ляющими 203.
 » кривой съ производящими
 постоянного вида 203.
 Цѣпь 199, 204.
 Чертежь 1.
 Шаблонъ 116.
 Шагъ винтовой линіи 164.
 Шаръ 116.
 Эллипсоидъ вращенія 199, 277.
 » трехъосный 208.
 Эпюра 12.